Проф. М. Л. ФРАНК

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД — 1933 — МОСКВА

Отв. редактор Е. В. Пулькина. Техн. редактор В. Д. Финити

ГТТИ № 351. Тираж 10000. Подп. в печать с матриц 13/XI 1933 г. Формат бумаги 82 × 110. Печатн. лист $11^1/_8$. Бум лист. $2^{25}/_{32}$. Печатн зн. в бум. л. 178 400 Заказ № 1200. Леноблгорлит № 30090. Выход в свет декабрь 1933 г.

3-я типография ОНТИ им. Бухарина. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

Предисловие к 1-му изданию.

Настоящий краткий курс элементарных приближенных вычислений значительно отличается от имеющихся аналогичных курсов. Опыт преподавания приближенных вычислений в вузах показывает, что при малом количестве времени, отводимом на этот предмет, усвоение его студентами обычно недостаточно удовлетворительно. Главное внимание чаще всего обращается на стремление внедрить правильные навыки приближенных вычислений, но за недостатком времени это плохо удается. Вместе с тем не остается времени на достаточно основательную проработку основных понятий, на выяснение смысла приближенных вычислений, на выработку критического отношения к вычислениям. Между тем, как мне кажется, именно эта сторона приближенных вычислений является наиболее важной. Навыки можно и нужно приобрести только при большом количестве работы, которая должна иметь место вовсе не во время занятий по приближенным вычислениям, а при всех расчетах в лабораториях физики, химии, при решении задач по механике, сопротивлению материалов, при проектировании и т. д. Курс приближенных вычислений должен только заложить фундамент сознательного отношения к вычислениям.

Поэтому в предлагаемом курсе может быть и не нашли себе места многие полезные при вычислениях правила, число которых чрезвычайно велико. Перегружать содержание курса избытком материала я не считал нужным. Зато очень много внимания уделено сравнительной оценке различных методов вычислений с точки зрения их простоты и степени точности. Громадное большинство примеров не представляют собою простые упражнения для развития одних только навыков, а заданы в такой форме, чтобы выяснить характерные преимущества и недостатки того или иного метода.

Курс составлен так, что для прохождения его нет надобности знать что-либо из высшей математики. Очень небольшое число формул из анализа приводятся в курсе с соответствующими объяснениями.

Будучи очень признателен всем, кто сообщит мне о недостатках настоящего курса и желательных изменениях в случае выхода следующих изданий.

Ленинград, 24/XII 1931 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО 2-му ИЗДАНИЮ.

Второе издание печатается без существенных изменений. Исправлены опечатки, формулировки некоторых примеров и внесены мелкие исправления. В конце дано приложение в котором изложены способы получения погрешностей функций методами дифференциального исчисления. Кроме того прибавлено решение большинства примеров.

Ленинград, 12/X 1933 г.

Введение.

Во всех случаях, когда приходится довести до конца решение какой-либо математической задачи практического характера, необходимо получить численный результат, а следовательно произвести ряд вычислений, часто самых элементарных. При этом оказывается, что, производя эти вычисления по известным из элементарной арифметики правилам, мы часто оказываемся неудовлетворенными нашей работой, и притом с двух точек зрения:

1) при практическом использовании полученных численных результатов выясняется, что количество проделанной нами вычислительной работы, число полученных цифр во много раз превышает потребности практики. Наша вычислительная работа оказывается чрезвычайно неэкономной, и

2) оказывается, что благодаря тому, что данные нам числа представляют собой лишь приближенные значения величин, с которыми мы имеем дело, то и результат вычислений оказался приближенным; мы не в состоянии определить, какова же точность полученного нами результата. Таким образом, результат нашей большой вычислительной работы является сомнительным.

Дело в том, что правила элементарной арифметики предполагают, что числа, над которыми мы производим действия, представляют собою точные значения некоторых величин. На самом деле такие случаи могут встретиться в виде исключения.

Рассмотрим пример: требуется определить количество в литрах в секунду подаваемой воды через трубу трехдюймового диаметра, протекающей со скоростью 1,5 *м* в секунду. Смотрим в справочник: 1 дюйм $=$ 25,4 *мм*. Площадь сечения трубы

$$F=\frac{(3\cdot 25{,}4)^2}{4}\pi \text{ мм}^2.$$

Переводя в квадратные дециметры и умножая на скорость в дециметрах в секунду, принимая $\pi=3{,}14$, получаем искомый ответ:

$$v=\frac{(3\cdot 25{,}4)^2\cdot 3{,}14\cdot 15}{4\cdot 10\,000}.$$

Решим этот пример до конца:

a)
$$\begin{array}{r} 25{,}4 \\ \times\quad 3 \\ \hline 76{,}2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 76{,}2 \\ \times\quad 76{,}2 \\ \hline 1524 \\ 4572 \\ 5334 \\ \hline 5806\;44 \end{array}$$

c) $5806{,}44 : 4 = 1451{,}61$

d)
$$\begin{array}{r} 1451{,}61 \\ \times\quad 15 \\ \hline 725805 \\ 145161 \\ \hline 21\,774{,}15 \end{array}$$

e) $21\,774{,}15 : 10\,000 = 2{,}177415$

f)
$$\begin{array}{r} 2{,}177415 \\ \times\quad 3{,}14 \\ \hline 8\,709\,660 \\ 2\,177\,415 \\ 6\,532\,245 \\ \hline 6{,}83708310 \end{array}$$

Ответ: 6,8370831 *л*/сек.

Не трудно видеть, что полученный ответ, как будто бы вполне правильный, не имеет никакого смысла. Прежде всего не может быть нужным знать количество протекающей воды с точностью до десяти миллионных частей литра, т. е. до десятых долей кубического миллиметра. Можно быть уверенным, что для заданной практической задачи наверно достаточно было знать до сотых долей литра, а может быть и еще грубее, напр. 6,8 или даже просто 7. Значит мы проделали массу лишней работы, вычисляя цифры, никому не нужные.

Можно возразить, что если мы не знаем, какая требуется точность результата, то лучше сделать несколько лишних вычислений, чем потом их переделывать второй раз, если бы мы вычислили всего до сотых, а потребовалось бы знать до тысячных. Отбросить лишнее проще, чем прибавить недостающее.

Но оказывается, что наша работа излишняя не только потому, что столько цифр нам не нужно знать, но и потому, что она по существу бессмысленна. Всем известно, что число π не равно 3,14, оно не может быть выражено точно никакой дробью. Точнее его можно взять 3,1416 или 3,141592 и т. д. Во всех этих случаях мы получаем разный результат наших вычислений. Диаметр трубы так же не может быть точно равен 76,2 *мм*. На токарном станке можно выточить с точностью до 0,1 *мм*, но при отливке такая точность почти невозможна и труба наверно может оказаться шире или уже по крайней мере на 0,2 *мм*.

Наконец, скорость волы в 1,5 *м* в секунду представляет собою некоторую среднюю скорость и на самом деле может отклоняться в ту или другую сторону наверно не менее чем на 0,05 *м* в секунду.

Попробуем сделать снова все вычисление, сохранив для π значение 3,14, но, взяв один раз диаметр 76 *мм* и скорость 1,45 *м*, а второй раз диаметр 76,4 *мм* и скорость 1,55 *м*. В первом случае мы получим

$$v_1 = 6{,}574532 \text{ литра в секунду}$$

и во втором

$$v_2 = 7{,}10212108 \text{ литра в секунду}.$$

Отсюда ясно, что если мы примем $v = 7$ *л*/сек., то это будет простой и единственно правильный (хотя и приближенно) ответ для данного случая. Все цифры после запятой были не только ненужными, но и заведомо неценными.

Таким образом на этом простом примере ясно, что в целом ряде случаев необходимо иметь какие-то новые правила действий, которые давали бы возможность, во-первых, упростить вычислительную работу и, во вторых, заранее определить степень точности полученного результата.

Эти правила, по существу чрезвычайно простые, и составляют главную часть курса элементарных приближенных вычислений. Необходимо только предупредить всякого приступающего к изучению этих методов, что прочное их усвоение, несмотря на чрезвычайную простоту, требует большого количества упражнений. Трудность заключается здесь не только в том, что надо усвоить новые правила и навыки, но к сожалению (и в этом пожалуй наибольшая трудность) в том, чтобы отвыкнуть от некоторых приобретенных в элементарной школе навыков, где преподавание арифметики до сих пор поставлено неправильно. Собственно говоря, весь этот курс мог бы и должен был бы быть отнесенным в школу первой и второй ступени и не загромождать курса высшей школы.

Глава I.

Основные понятия приближенных вычислений.

§ 1. Точные и приближенные значения величин.

Численные значения величин почти всегда известны нам не точно, а лишь приближенно. Ни одно физическое измерение не может быть произведено „абсолютно точно" и всегда должно остаться не совсем определенным, отчасти в силу несовершенства способов измерений, отчасти же и потому, что сами измеряемые величины являются переменными, как например размеры твердого тела, его вес и т. д., которые принято считать постоянными, но которые на самом деле изменяются в небольших пределах, а следовательно и при наилучших способах измерений не могли бы быть записаны в форме постоянного числа. Лишь численные коэфициенты, входящие в математические формулы, являются действительно точными.

Так напр. в формуле объема конуса

$$v=\frac{1}{3}\pi r^2h,$$

число $\frac{1}{3}$, число π и показатель степени 2 являются действительно точными. Но вместе с тем число $\frac{1}{3}$ не может быть записано точно в виде конечной десятичной дроби, что обычно является полезным при вычислениях, а число π вообще не может быть точно записано ни в форме простой, ни в форме конечной десятичной дроби. Если мы примем приближенно $\frac{1}{3} \doteq 0{,}333$, а $\pi \doteq 3{,}14$, то мы возьмем вместо истинных величин неправильные, заведомо содержащие погрешности. Что касается значений r и h, то, конечно, можно себе представить, что мы сами себе задаем эти размеры и говорим: пусть $r=4$ *см* и $h=10$ *см*; тогда числа эти являются точными. Но если речь идет напр. о заказе на воронку конической формы, имеющей указанные размеры, то мы заранее знаем, что действительный объем воронки не будет точно равен вычисленному нами, но в силу неточности выполнения будет отличаться от вычисленного нами размера на некоторую величину, которую мы будем называть погрешностью.

§ 2. Абсолютная погрешность.

Итак будем называть погрешностью или точнее абсолютной погрешностью данного приближенного числа разность между точным значением некоторой величины и приближенным его заданием. Для приближенного равенства мы будем в дальнейшем пользоваться везде обозначением $\doteqdot$; так напр. приняв $\frac{1}{3} \doteqdot 0{,}333$ мы получаем, что погрешность нашего числа

$$\alpha = \frac{1}{3} - 0{,}333 = \frac{1000}{3000} - \frac{999}{3000} = \frac{1}{3000},$$

и вообще, обозначая буквой x истинное значение, буквой a приближенное и буквой α погрешность, имеем

$$\alpha = x - a, \text{ или } x = a + \alpha.$$

Если взятое нами приближенное число больше истинного, т. е. $\alpha < 0$, то говорят, что число взято с избытком, если $a < x$, т. е. $\alpha > 0$, то число взято с недостатком. [1]

Из сказанного относительно неточности задания физических величин должно быть ясным, что в громадном большинстве случаев нет возможности определить величину погрешности данного приближенного значения, так как точное значение неизвестно. Если нам известно на основании измерения, что диаметр некоторого цилиндра равен 74 *мм*, то это только означает, что измерение велось с точностью до 1 *мм* и доли меньшие не были учтены. Мы можем тогда в лучшем случае утверждать, что диаметр d

$$73{,}5 \leqslant d \leqslant 74{,}5,$$

так как будь диаметр $d < 73{,}5$, то он был бы при отбрасывании десятых долей скорее принят за 73, чем за 74 *мм*, и точно так же будь диаметр $d > 74{,}5$, то вернее было бы записано 75, чем 74.

---

[1] К сожалению в литературе по приближенным вычислениям не установлено точное определение погрешности. В некоторых руководствах погрешностью называют не величину $x - a$, а обратную ей по знаку $a - x$.

Отсюда следует, что погрешность числа 74 лежит между $+0{,}5$ и $-0{,}5$ *мм.*

$$-0{,}5 \leqslant \alpha \leqslant +0{,}5.$$

Если обозначим буквой Δ наибольшее абсолютное значение величины α, т. е. $\Delta = |\alpha|_{\max}$, то в данном случае получим

$$\Delta = 0{,}5 \text{ мм}.$$

Величина Δ, которая почти всегда больше и лишь в исключительном случае равна абсолютной погрешности, называется **предельной абсолютной погрешностью**. Термин этот, хотя и очень неудачный, широко применяется. В дальнейшем нам однакоже сравнительно редко придется иметь дело с самими погрешностями, которых мы обычно не знаем, а потому в тех случаях, когда это не вызовет недоразумения, мы будем слово „предельная" просто опускать и, говоря об абсолютной погрешности, подразумевать именно эту предельную погрешность. Если к данному приближенному числу прибавить или отнять от него предельную абсолютную погрешность, то получатся два числа, между которыми лежит данное, т. е. которые представляют собой **границы**, внутри которых должно находиться значение истинного числа

$$a - \Delta < x < a + \Delta.$$

Таким образом предельную абсолютную погрешность можно определить как такое число, которое, будучи прибавлено или отнято от приближенного числа, дает границы неизвестного истинного числа.

В некоторых случаях мы будем знать знак погрешности и тогда будем его присоединять, т. е. писать $+\Delta$ или $-\Delta$, а в случае, когда знак неизвестен, писать просто Δ, подразумевая тогда абсолютное значение предельной погрешности. Записывая число $\pi \doteq 3{,}14$, мы не знаем численного значения погрешности, так как

$$\alpha = (\pi - 3{,}14)$$

не может быть точно записано при помощи конечного числа цифр. Но так как нам известно, что более точно

$$\pi \doteq 3{,}1415926$$

то мы можем сказать, что

$$0{,}001592 < \alpha < 0{,}001593$$

и следовательно мы знаем знак погрешности.

Обычно не имеет никакого смысла определять погрешность столь точно, и достаточно принять $\Delta = + 0{,}002$ или в крайнем случае $\Delta = + 0{,}0016$, другими словами мы закругляем значение погрешности, увеличивая ее. [1]

Увеличение предельной погрешности, очевидно, является допустимым; от этого только уменьшается точность, т. е. раздвигаются границы, между которыми находится наше число; уменьшение же предельной погрешности недопустимо без специального выяснения, не может ли действительная погрешность оказаться больше принятой нами предельной.

При записи приближенных чисел вместе с их погрешностями обычно пишут позади числа в скобках величину погрешности, ставя при ней определенный знак, когда он известен, или $\pm$, когда он неизвестен. Так напр. в первом примере мы должны записать

$$d \doteq 74 \text{ мм } (\pm 0{,}5)$$

и во втором:

$$\pi \doteq 3{,}14 \ (+ 0{,}002).$$

Однако же при большом количестве вычислений с приближенными числами такой способ записи слишком громоздок. Так напр. для числа π с 5 десятичными знаками мы имели бы запись:

$$\pi \doteq 3{,}14159 \ (+ 0{,}000003).$$

Поэтому удобнее условиться записывать погрешность в долях единицы последнего из выписанных знаков, так, как это обычно делается при записи разностей или пропорциональных частей в таблицах логарифмов. При этом, в случае когда знак погрешности неизвестен, мы будем писать погрешность совсем без знака.

Таким образом в первом примере мы запишем

$$d \doteq 74 \text{ мм } (1/2)$$

указывая таким образом, что погрешность числа d не превышает $1/2$ миллиметра, во втором случае мы запишем

$$\pi \doteq 3{,}14 \ (+ 0{,}2)$$

указывая, что погрешность, во-первых, положительна, и, во-вторых, не превышает двух десятых от единицы последней цифры, т. е. от одной сотой, и, наконец: $\pi \doteq 3{,}14159 \ (+ 0{,}3)$ для последнего случая.

---

[1] Отсюда ясно, почему термин **предельная погрешность** является неудачным. Величина погрешности в данном случае не только не достигает предельной, но разность между предельной погрешностью и самой погрешностью остается больше некоторой конечной величины, что совершенно противоречит понятию предела, установленному в анализе,

Пример 1. Измерить помощью масштабной линейки длину карандаша, спички, размеры тетради или книги, записать полученные величины и их погрешности.

Пример 2. Измерить при помощи транспортира угол, начерченный на бумаге и записать его величину и погрешность.

Пример 3. Записать число π с двумя, тремя и четырьмя знаками после запятой и определить погрешности.

Пример 4. Записать дроби $\frac{7}{9}, \frac{5}{7}, \frac{9}{13}$ в форме десятичной дроби с четырьмя знаками после запятой, и определить погрешность полученных чисел.

Пример 5. Скорость света в пустоте на основании ряда определений не менее 299 700 и не более 300 000 *км*/сек. Обычно ее принимают $c \doteq 300\,000$ *км*/сек. Какова предельная абсолютная погрешность?

§ 3. Способ записи приближенных значений.

Условимся прежде всего относительно записи так называемых „приближенных чисел". Следует оговориться, что собственно говоря никаких „точных" или „неточных" чисел не существует. Речь может идти только о числах, неточно представляющих значения каких-либо величин. Но в литературе очень распространено выражение „приближенные" или „неточные" числа и краткости ради и мы будем этими терминами пользоваться.

Запись приближенного числа удобнее всего вести в десятичной системе, т. е. для случая дроби изображать его в форме десятичной дроби.

Мы будем называть з н а ч а щ и м и ц и ф р а м и данного числа все цифры его, за исключением нулей, стоящих впереди числа и служащих лишь для указания разряда первой отличной от нуля цифры.

Таким образом числа 743; 74,3; 7,43: 0,743; 0,000743 и т. д. все имеют одно и то же число значащих цифр, а именно — три. Что касается нулей, стоящих справа, то мы должны различать два случая, когда нули эти являются значащими цифрами и когда они такими не являются. Так напр. если написать

$$1 \text{ сутки} = 86\,400 \text{ секунд},$$

то здесь нули являются значащими цифрами, так как известно точно, что сутки делятся именно на 86 400 секунд не более и не менее и что число это следовательно не содержит ни единиц, ни десятков, или содержит их по нулю раз. Все цифры 8, 6, 4, 0, 0 точно указывают нам число единиц, содержащихся в каждом из разрядов. Точно так же если мы запишем, что

$$1 \text{ дюйм} = 25{,}400 \textit{ мм},$$

то здесь все пять цифр являются значащими в том смысле, как это было только что выяснено на предыдущем примере. Поэтому во всех случаях, когда в десятичной дроби мы будем знать, что стоящая на конце числа цифра есть нуль, мы ее не всегда будем опускать, потому что, если мы запишем

$$1 \text{ дюйм} = 25{,}4 \textit{ мм},$$

то мы можем предполагать, что число сотых долей миллиметра нам неизвестно и следовательно погрешность выражается в сотых долях, в то время как при первой форме записи мы знаем достоверно, что погрешность может выражаться лишь в десятичных долях миллиметра. Отсюда сразу видно, как неудобно напр. записывать число, представляющее скорость света в виде

$$c = 299800 \textit{ км}/\text{сек}.$$

когда мы знаем, что число это содержит погрешность, доходящую до 200 *км*/сек. Здесь нули не представляют собой значащих цифр и написаны только для той же цели, как пишутся нули спереди, т. е. для обозначения разрядов значащих цифр. Для избежания путаницы мы в дальнейшем будем такие числа всегда выписывать иначе, а именно

$$c = 299{,}8 \cdot 10^3 \textit{ км}/\text{сек}. \quad \text{или} \quad c = 299{,}8 \cdot 10^8 \textit{ см}/\text{сек}.$$

Так называемое Лошмидтовское число, т. е. число молекул в граммолекуле газа, записывается обычно в виде

$$N = 6{,}064 \cdot 10^{23}.$$

Такая форма записи очень удобна и широко применяется в физике и астрономии, где приходится иметь дело с очень большими или очень малыми приближенными числами. Так и пр. массу атома водорода мы записываем в виде $m \doteq 1{,}6490 \cdot 10^{-24}$. Расстояние от земли до солнца $l = 149{,}5 \cdot 10^9$ *м*.

От понятия **числа значащих цифр** следует отличать понятие **числа знаков**. Под последним мы подразумеваем число цифр, стоящих перед запятой. Если перед запятой стоит 0, а после запятой значащая цифра, то число имеет нуль знаков. Если перед запятой нуль и после запятой k нулей до первой значащей цифры, то число имеет $-k$ знаков. Введение понятия отрицательного числа знаков весьма полезно и вполне естественно. Мы знаем, что если однозначное число напр. 5 помножить на 10^3, то получим 5000, т. е. число четырехзначное. Точно также если однозначное 5 помножить на 10^{-3}, получим 0,005; в первом случае для получения числа знаков 5000 мы к единице прибавили 3 и получили 4; точно также, прибавив к единице — 3, получим — 2.

Пример 6. Сколько значащих цифр и сколько знаков имеют числа: 51,82; 0,5182; 5182; 51,8; 51; 0,5; 0,00082.

Пример 7. Записать $\frac{3}{7}$; $\frac{2}{9}$ с пятью значащими цифрами.

Пример 8. Определить число знаков и значащих цифр числа $n = 2{,}705 \cdot 10^{19}$ (число молекул в $см^3$ газа при 0° и 760 *мм* давления), а также для числа $e = 4{,}774 \cdot 10^{-10}$ (заряд электрона в эл.-стат. един. электричества).

§ 4. Округление приближенных чисел.

Если нам известно число с бо́льшим числом значащих цифр, чем это нам по условиям задачи является необходимым, то можно отбросить лишние знаки, сделав так называемое округление. Так напр., если нам известно, что число

$$\pi \doteq 3{,}141592653\ldots$$

то мы можем его записать и короче, отбрасывая одну или несколько последних цифр. При этом, очевидно, для уменьшения погрешности выгоднее, в случае, если первая из отбрасываемых цифр равна 5 или больше, увеличить последнюю из оставленных цифр на единицу. Тогда можно быть уверенным, что погрешность полученного нами числа не превысит половины единицы последней из оставшихся цифр. Согласно этому правилу надо при закруглении числа π писать

3,14159265
3,1415927
3,141593
3,14159
3,1416
3,142
3,14

Иногда предпочитают однако, отбрасывая цифры, не менять последнюю из оставшихся, даже если первая из отброшенных больше 5, так как в этом случае мы знаем всегда знак погрешности, т. е. все числа даются нам в этом случае с недостатком, самая погрешность зато может достигать единицы последней значащей цифры.

Лучше всего, и этим иногда тоже пользуются, делая закругления по первому способу, т. е. доводя погрешность лишь до половины последней значащей цифры, отмечать каким-либо способом, обычно чертой, поставленной в конце и наверху, случаи, когда последняя цифра была нами увеличена на единицу, т. е. записывать, напр.:

$$3{,}14;\ 3{,}14\bar{2};\ 3{,}141\bar{6};\ 3{,}14159;\ 3{,}14159\bar{3};\ \text{и т. д.},$$

в этом случае числа без черточек означают, что они взяты с недостатком и числа с черточками — с избытком. Однако в технике обычно пользуются только простейшим **первым правилом закругления**.

Возможны случаи, хотя и редко встречающиеся, а именно, когда отбрасываемая цифра равна 5, а за ней больше цифр нет. Так, например, $\frac{3}{16} = 0{,}1875$. Если мы хотим взять это число лишь с тремя десятичными знаками, то с одинаковым правом могли бы написать 0,188 и 0,187, так как и в том и другом случае погрешность была бы одинаковой. Обычно в этом случае пользуются правилом закруглять число до четного, т. е. брать 0,188. Правило это, конечно, чисто условное и ничем не обоснованное. Число $\frac{5}{16} = 0{,}3125$ в случае закругления до трех цифр мы записали бы 0,312.

Возможен еще такой случай, что цифра 5 на конце сама получилась от закругления числа. Напр. по пятизначным логарифмам находим $\lg 34 = 1{,}53148$; $\lg 66 = 1{,}81954$. Если бы мы взяли только 4 десятичных знака, то записали бы $\lg 34 = 1{,}5315$ и $\lg 66 = 1{,}8195$. В обоих случаях числа оканчиваются на 5, но эта пятерка не есть точное число; первое взято с избытком, второе с недостатком. Иногда это помечают также черточкой в первом случае и точкой во втором, т. е. пишут $\lg 34 = 1{,}531\bar{5}$ и $\lg 66 = 1{,}819\dot{5}$.

Надо обратить внимание на часто встречающуюся неточность выражения. Когда говорят, что данная величина измерена с точностью до Δ, напр. с точностью до 0,01, то это означает, что предельная абсолютная погрешность равна 0,01; но когда при технических измерениях говорят, что длина измерена с точностью до 1 *мм* или вес с точностью до 1 *г*, то это означает обычно, что запись производилась только до этих величин, и измеряемая величина закруглялась таким образом, что доли миллиметра или грамма меньше половины этих величин отбрасывались, а больше половины — закруглялись до целой единицы, т. е. предельная погрешность в этих случаях равна 0,5 *мм* или 0,5 *г*. В дальнейшем мы так и будем понимать это выражение.

§ 5. Относительная погрешность.

Абсолютная погрешность числа не дает нам еще представления о степени точности взятого значения. В самом деле, если мы знаем, что данная длина измерена с точностью до 1 *мм*, т. е. погрешность не превышает $^1/_2$ *мм*, то мы не можем еще сказать, точно ли это измерение. Если речь идет о размерах каких-либо земельных участков или длины рельсового пути, то точность была бы бесцельно и бессмысленно велика; если бы речь шла о диаметре махового колеса, то точность была бы вполне достаточной, а если бы мы говорили о диаметре электрического провода, то точность была бы совершенно недостаточной. Таким образом точность измерения зависит не только от величины абсолютной погрешности, но и от самой измеряемой величины. За меру точности принято принимать так называемую *относительную погрешность*, т. е. отношение абсолютной погрешности величины к самой величине; таким образом, обозначая абсолютную погрешность через α и относительную через ε, имеем

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{x}.$$

Введем понятие *предельной относительной погрешности* δ, равной отношению предельной абсолютной погрешности Δ к самому числу:

$$\delta = \frac{\Delta}{x}.$$

Так как само число x нам почти никогда неизвестно, и обычно Δ относительно мало по сравнению с x, то в качестве относительной погрешности берут не отношение $\frac{\Delta}{x}$, а отношение $\frac{\Delta}{a}$, т. е. отношение предельной абсолютной погрешности к приближенному значению величины. Могла бы быть опасность, что при этом мы получили бы предельную относительную погрешность меньше истинной, если бы число a было взято с избытком. На самом деле этого случиться не может, потому что в качестве знаменателя обычно берется не самое число a, а закругленное и притом в сторону уменьшения.

Так напр. для числа $\pi \doteq 3{,}14$
$\Delta = 0{,}002$

$$\delta = \frac{0{,}002}{3} = \frac{2}{3000} = \frac{1}{1500}.$$

Точно также, взяв для числа $\frac{1}{7}=0{,}1429$ и принимая $\Delta=$ $=0{,}00005$, получим

$$\delta=\frac{0{,}0005}{0{,}1}=\frac{5}{10\,000}=\frac{1}{2000}.$$

Так как значение дроби не меняется от умножения числителя и знаменателя на одно и то же число, то определение относительной погрешности можно совершать проще, а именно, беря абсолютную погрешность в единицах или долях единицы последнего знака числа и деля на самое число с отброшенной запятой. Таким образом, если дано: $\pi \doteq 3{,}14$ (0,2), то

$$\delta_\pi \doteq \frac{0{,}2}{314} \doteq \frac{0{,}2}{300}=\frac{1}{1500};$$

Если $\frac{1}{7} \doteq 0{,}1429$ ($^1/_2$), то

$$\delta=\frac{^1/_2}{1428} \doteq \frac{1}{2\cdot 1000}=\frac{1}{2000}.$$

Пример 9. Определить относительную погрешность и ее зн при записи дробей $\frac{7}{9}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{9}{13}$ в форме десятичной дроби 4 знаками после запятой.

Пример 10. Определить относительную погрешность чи выражающего длину спички или карандаша, измеренных помощьк масштаба с точностью до 1 *мм.*

Пример 11. Известно, что $\sqrt{2}=1{,}41421$; определить абс лютные и относительные погрешности чисел $\sqrt{2} \doteq 1{,}414$; $\sqrt{200} \doteq 14{,}14$; $\sqrt{0{,}02}=0{,}1414$, данных с одинаковым числом значащих цифр, и точно также для: $\sqrt{2} \doteq 1{,}41$; $\sqrt{200}=14{,}14$; $\sqrt{0{,}02}=0{,}14$, данных с одинаковым числом десятичных знаков.

§ 6. Число точных значащих цифр и относительная погрешность.

Предположим, что нам дано число a, причем, как это чаще всег бывает, все значащие цифры его точны и абсолютная погрешнос не превышает половины единицы последней цифры. Пусть число a дано в форме целого числа с десятичной дробью, причем число знаков перед запятой равно m, а число значащих цифр n. Тогда, отбрасывая запятую, мы увеличиваем число a в 10^{n-m} раз. Абсоютная погрешность станет равна $\frac{1}{2}$ и следовательно относительная будет равна

$$\delta = \frac{\frac{1}{2}}{a \cdot 10^{n-m}}.$$

Если мы не знаем, чему равно число a, но только знаем, что но имеет m знаков перед запятой, то мы можем быть уверены, что $10^{m-1} \leqslant a < 10^m$, так как 10^{m-1} есть самое малое число, меющее m знаков перед запятой. Таким образом получим для δ

$$\frac{\frac{1}{2}}{10^m \cdot 10^{n-m}} < \delta \leqslant \frac{\frac{1}{2}}{10^{m-1} \cdot 10^{n-m}}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 10^n} < \delta \leqslant \frac{1}{2 \cdot 10^{n-1}}. \tag{1}$$

Если число a хотя бы точно и неизвестно, но известно, что первая цифра слева этого числа есть z, то предельную относительную погрешность можно определить точнее. В самом деле в этом

$$z \cdot 10^{m-1} \leqslant a < (z+1)10^{m-1}$$

следовательно

$$\frac{1}{2(z+1)10^{n-1}} < \delta \leqslant \frac{1}{2z10^{n-1}}. \tag{2}$$

При вычислении предельной погрешности мы можем ее увеличивать, а потому будем брать правые части неравенств и заменять их равенствами. Получим

$$\delta = \frac{1}{2 \cdot 10^{n-1}}, \text{ когда первая цифра неизвестна, и} \tag{3}$$

$$\delta = \frac{1}{2z \cdot 10^{n-1}}, \text{ когда первая цифра равна } z. \tag{4}$$

Рассмотрим пример.

Примем $\pi \doteq 3{,}14$. Если бы мы знали только то, что π принято тремя значащими цифрами, то по формуле (3) мы получили бы:

$$\delta_\pi = \frac{1}{2 \cdot 10^2} = \frac{1}{200}.$$

Если мы знаем, что первая цифра числа π равна 3, то мы имеем право написать

$$\delta_{\pi}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 10^{2}}=\frac{1}{600}.$$

Само собой разумеется, что если мы знаем, что первая из отброшенных цифр числа π, следующая за 4, есть 1, то абсолютная погрешность во всяком случае не больше 0,2 последней значащей цифры, и следовательно мы вправе взять δ еще точнее, а именно

$$\delta=+\frac{0,2}{3\cdot 10^{2}}=+\frac{1}{1500}$$

и притом со знаком плюс.

Пример 12. Определить относительную погрешность $\sin 37°$, данного в таблице с четырьмя знаками:

$$\sin 37° \doteq 0,6018.$$

$$\delta=\frac{1}{2\cdot 6\cdot 10^{3}}=\frac{1}{12\,000}.$$

Пример 13. Определить относительную погрешность $\operatorname{tg} 30'$ и $\operatorname{tg} 89°30'$, данных в таблицах с четырьмя десятичными знаками.

$$\operatorname{tg} 30'=0,0087;\ \delta=\frac{1}{2\cdot 8\cdot 10}=\frac{1}{160}$$

$$\operatorname{tg} 89°30'=114,5887;\ \delta_2 \doteq \frac{1}{2\cdot 1\cdot 10^{6}}=\frac{1}{2\,000\,000}.$$

Из последнего примера видно, насколько сильно отличается точность (выражаемая относительной погрешностью) данных, взятых в разных местах одной и той же таблицы. В дальнейшем будет показано, что такого рода таблицы являются часто нецелесообразно составленными.

Пример 14. Определить относительные погрешности $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{99}$, взятых с тремя знаками после запятой, не вычисляя корней, но приняв во внимание значение первой цифры корня.

Обратимся теперь к обратной задаче, когда требуется узнать, сколько значащих цифр числа нужно взять, чтобы относительная погрешность не превысила заданной величины. Воспользуемся опять формулами (1) и (2), возьмем снова правые части неравенства и заменим их равенствами, так как теперь мы требуем, чтобы δ не превысила своего наибольшего значения, которое она может иметь при неизвестном пока числе значащих цифр. Возьмем следовательно:

$$\delta=\frac{1}{2\cdot 10^{n-1}} \quad \text{или} \quad \delta=\frac{1}{2z 10^{n-1}},$$

смотря по тому, неизвестна или известна первая цифра числа. Из этих формул получаем:

$$10^{n-1}=\frac{1}{2\delta} \text{ или } 10^{n-1}=\frac{1}{2z\delta}$$

и наконец:

$$10^{n}=\frac{5}{\delta} \tag{5}$$

или

$$10^{n}=\frac{5}{z\delta}. \tag{6}$$

Для решения этих показательных уравнений и определения из них n нет надобности пользоваться логарифмами. Обычно очень просто можно найти два целых значения n_1 и $n_2=n_1+1$, для первого из которых левая часть меньше правой и для второго больше. Очевидно, приходится взять большее значение, чтобы быть уверенным, что погрешность не превысит данной.

Пример 15. Со сколькими десятичными знаками надо взять $\sqrt{20}$, чтобы погрешность не превышала 0,1%?

Так как первая цифра $\sqrt{20}$ равна $z=4$, $\delta=0{,}001$, то, пользуясь второй формулой, получим:

$$10^{n}=\frac{5}{4\cdot 0{,}001}=\frac{5000}{4}=1250.$$

Очевидно, что для $n_1=3$; $10^3=1000$; и для $n_2=4$; $10^n=10\,000$ приходится взять число 4, т. е. четыре значащих цифры, а следовательно 3 десятичных знака:

$$\sqrt{20}\div 4{,}472 \quad (^1/_2)$$

Проверка.

$$\delta=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 10^{4-1}}=\frac{1}{8000}<0{,}1\%.$$

Однако нетрудно видеть, что в данном случае мы из осторожности взяли лишний знак. В самом деле, если бы мы при вычислении корня увидели, что четвертая значащая цифра равна 2, то могли бы вычислить относительную погрешность числа, взятого с тремя значащими цифрами, точнее, мы получили бы

$$\sqrt{20}\div 4{,}47 \ (0{,}3)$$

и следовательно

$$\delta=\frac{0{,}3}{4\cdot 10^{3-1}}=\frac{3}{4000}<0{,}1\%.$$

Таким образом четыре значащих цифры оказались излишними и уже три удовлетворяют поставленному требованию.

При решении задач на приближенные вычисления сплошь и рядом получается такое, на первый взгляд странное недоразумение, что ответ по вполне правильно взятой формуле оказывается неудовлетворительным (неверным его назвать нельзя). Объяснение этого заключается в том, что почти во всех формулах мы имеем дело не с равенствами, а с неравенствами.

При решении так называемой прямой задачи приближенных вычислений, заключающейся в определении величины погрешности (конечно „предельной"), мы получаем всегда величину большую, чем можно было бы получить, если бы мы могли учесть ряд обстоятельств, обычно нам неизвестных. Для большей уверенности в результате мы принуждены брать большую из всех возможных величин, чтобы не было сомнений, что истинная погрешность не превышает этой, полученной нами „предельной".

Наоборот, при решении так называемой обратной задачи приближенных вычислений, когда нам задана погрешность и требуется определить со сколькими знаками, или вообще с какой степенью точности надо взять числа, входящие в задачу, мы почти всегда делаем ошибку в сторону слишком большой точности, так как, не зная еще всех цифр числа, которое получится в результате измерения или вычисления, мы должны увеличить точность этих чисел для того, чтобы их погрешность заведомо была бы не больше, чем заданная нам предельная. Некоторое увеличение измерительной или вычислительной работы, получающееся в результате этой необходимости застраховаться от ошибки, обычно искупаются тем, что возможность закругления чисел (в сторону их увеличения или уменьшения, смотря по случаю) упрощает самые вычисления. Однако бывают случаи, о которых будет сказано ниже, когда приходится быть значительно осторожнее при оценке погрешностей, чем это обычно делается.

Пример 16. С какой точностью надо измерить длину карандаша, который немного меньше 20 *см*, чтобы погрешность измерения не превышала $^1/_2{}^0/_0$.

Выражая длину в сантиметрах, мы видим, что она превышает 10, т. е.

$$z=1;\quad \delta={}^1/_2{}^0/_0=\frac{1}{200},$$

отсюда

$$10^n=\frac{5\cdot 200}{1}=1000;\quad n=3.$$

Надо, следовательно, при измерении получить три значащих цифры, т. е. измерить с точностью до 1 *мм*. Если длина карандаша превышала 18 *см*, то в этом случае

$$\delta = \frac{^1/_2}{180} = \frac{1}{360} < {}^1/_2\%.$$

Результат получился удовлетворительный — точность измерения немногим превышает заданную.

Пример 17. Со сколькими десятичными знаками надо вычислить $\frac{5}{7}$; $\frac{9}{13}$; $\frac{4}{3,7}$, чтобы относительная погрешность не превышала $0,1\%$. Решить пример, сначала не делая самого деления.

После определения числа знаков произвести деление и проверить, нельзя ли было бы взять меньшее число знаков.

Пример 18. В технических таблицах корней квадратных чисел от 1 до 1000 обычно все эти числа даны с четырьмя знаками после запятой. Определить, какое из этих чисел наименее точно и какова точность этого наименее точного числа. Продумать, начиная с какого числа можно было бы дать таблицу всего с тремя, а может быть даже с двумя знаками после запятой, если поставить требование, чтобы точность всех корней была бы все-таки не меньше, чем у того числа, которое в обычных таблицах оказывается наименее точно данным.

§ 7. Малые величины различных порядков.

В дальнейшем нам придется производить различные действия над погрешностями, которые относительно во много раз меньше тех чисел, к которым они относятся. Мы будем неоднократно упрощать эти действия и вводить правила, сокращающие вычислительную работу. Для выяснения допустимости так го рода упрощений необходимо прежде всего рассмотреть некоторые свойства так называемых малых величин.

Само собой разумеется, что понятия большой и малой величины относительны. Размер бактерии мал по сравнению с размером человека, но велик по сравнению с диаметром молекулы. Человек в свою очередь мал по сравнению с диаметром земли, а диаметр земли мал по сравнению с диаметром солнечной системы и т. д.

Вводя понятие относительно малой и относительно большой величины, которые для краткости будем просто называть малой и большой, мы видим, что можно ввести понятие и порядка малой и большой величины. Так, если диаметр земли назвать малой величиной относительно диаметра солнечной системы, то рост человека, малый относительно диаметра земли, можно назвать малой величиной 2-го порядка относительно солнечной системы, а размеры бактерии малой величиной 3-го порядка и т. д. Однако такое распределение на порядки очевидно произвольно, так как между диаметром солнечной системы и диаметром земного шара можно было бы поставить еще диаметр солнца и т. д.

Мы будем условно называть малой величиной такую, которая в громадном большинстве технических и лабораторных вычислений является допустимой относительной погрешностью. Обычно эта величина колеблется около $\frac{1}{2000}$, отклоняясь в ту или иную сторону иногда в довольно больших пределах от $\frac{1}{200}$ до $\frac{1}{20000}$; но эти крайние пределы, вообще говоря, являются исключениями. Если принять, что величину $0,001 < \delta < 0,0001$ мы можем в большинстве случаев считать малой величиной по сравнению с единицей, то сама единица будет малой величиной по сравнению с числом a, где

$$1000 < a < 10\,000;$$

а следовательно δ будет малой величиной второго порядка относительно α и т. д.

Если α, β, γ малые величины первого порядка по сравнению с единицей, то $\alpha\beta$, α^2, $\alpha\gamma$, β^2, $\beta\gamma$, γ^2 и т. д. все малые величины второго порядка, а $\alpha^2\beta$, $\alpha\beta^2$, α^3, β^3 и т. д. малые величины третьего порядка, $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$ или $\frac{\alpha\gamma}{\beta}$ и т. д. малые величины первого порядка.

Если α малая величина по сравнению с числом a, то $\frac{\alpha}{a}$ малая величина по сравнению с единицей; $a\alpha$ малая величина по сравнению с a^2, α малая величина второго порядка по сравнению с a^2, и α^2 малая величина второго порядка но сравнению с a, и т. д.

Считаем нужным обратить внимание на то, что введенное нами понятие **малой величины** не следует отождествлять с понятием **бесконечно малой величины**, которым пользуются в анализе. Там речь идет о переменной величине, имеющей пределом нуль. Здесь же речь идет о постоянных величинах, размеры которых по сравнению с другими постоянными ограничены определенными отношениями. Тем не менее целый ряд положений из анализа, относящихся к бесконечно малым величинам, могут быть отнесены к нашим малым, что ясно уже из того что постоянная величина может быть рассматриваема как частное значение переменной.

В дальнейшем мы будем всегда (когда это не будет специально оговорено) считать, что абсолютные погрешности малы по сравнению с числами, к которым они отнесены. Пусть

$$x = a + \alpha,$$

где a приближенное значение числа, а α его абсолютная погрешность. Мы можем написать это равенство иначе:

$$x = a\left(1 + \frac{\alpha}{a}\right),$$

и так как $\frac{\alpha}{a} = \varepsilon$ есть относительная погрешность, то

$$x = a(1 + \varepsilon).$$

Очевидно, что отношение $\frac{\alpha}{a} = \frac{\varepsilon}{1}$ и следовательно, если абсолютная погрешность мала по сравнению с числом, то относительная погрешность столь же мала по сравнению с единицей. При всех расчетах и вычислениях мы обычно устанавливаем наибольшую допустимую *относительную погрешность* и должны следить за тем, чтобы при производстве различных арифметических действий погрешность не возрасла выше допущенного предела. Такого рода вычисления носят название *вычислений с учетом погрешностей*. Если считать погрешность малыми величинами первого порядка, то все эти малые величины мы должны учитывать при вычислениях, малые же величины второго и высших порядков очевидно можно не учитывать. В самом деле, если малая величина первого порядка относительно единицы $\varepsilon_1 < 0{,}001$, то малая величина второго порядка

$$\varepsilon_2 < (0{,}001)^2,$$

т. е. нужно было бы иметь сумму более тысячи таких малых величин, чтобы получить малую величину первого порядка, учет которой для нас имеет смысл.

Пример.

$$(a + \alpha)\cdot(b + \beta) = ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta,$$

или иначе

$$(a + \alpha)(b + \beta) = ab(1 + \varepsilon)(1 + \eta) = ab(1 + \varepsilon + \eta + \varepsilon\eta),$$

где

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{a} \text{ и } \eta = \frac{\beta}{b}$$

малые величины первого порядка относительно единицы.

Совершенно очевидно, что $\alpha\beta$ малая величина второго порядка относительно ab и $\varepsilon\eta$ малая величина второго порядка относительно единицы. Согласно принятому условию мы будем их отбрасывать, т. е. писать:

$$(a+\alpha)(b+\beta) \doteq ab + a\beta + b\alpha$$

и

$$(1+\varepsilon)(1+\eta) \doteq 1 + \varepsilon + \eta.$$

Покажем это еще раз на численном примере.

Площадь комнаты прямоугольной формы измеряется с помощью рулетки с точностью до 0,01 *м*. Пусть длина $l = 7{,}63$ *м* ($^1/_2$) и ширина $k = 4{,}27$ *м* ($^1/_2$); обозначая предельную погрешность 0,005 *м* через α, получим:

$$(l+\alpha)(k+\alpha) = lk + (l+k)\alpha + \alpha^2.$$

Производя вычисление, находим:

$$l \cdot k = 7{,}63 \cdot 4{,}27 = 32{,}5801 \text{ м}^2$$

$$(l+k)\alpha = (7{,}63 + 4{,}27) \cdot 0{,}005 = 0{,}0595 \text{ м}^2$$

$$\alpha^2 = (0{,}005)^2 = 0{,}000025 \text{ м}^2.$$

Мы видим, что погрешность произведения выражается у нас уже почти в 0,06 $м^2$, т. е. сотые доли произведения не дают нам точного значения. Тем более это относится к тысячным, десятитысячным и т. д. Что же касается α^2, то оно выражается в стотысячных и миллионных долях, вычисление которых совершенно не имеет смысла. Полученный нами результат мы могли бы записать так:

$$lk = 32{,}58 \text{ м}^2 \ (6).$$

Однако же, обычно, избегают выписывания неточных цифр, хотя это и ведет к некоторому увеличению предельной погрешности. В самом деле написанное равенство означает, что

$$32{,}52 < lk < 32{,}64,$$

так как последняя цифра может содержать погрешность до 6 единиц. Если же мы отбросим последнюю цифру 8, то по правилу мы должны увеличить предыдущую цифру на единицу. От этого погрешность может возрасти еще на 2 единицы последнего знака, которые мы к числу прибавим, т. е. мы получим:

$$lk = 32{,}6 \ (0{,}8),$$

где погрешность будет составлять уже 0,8 последней значащей цифры, т. е.

$$32{,}52 < lk < 32{,}68.$$

Сплошь и рядом, когда требуется только грубая оценка погрешности, ее записывают только в виде единицы последнего знака, т. е. пишут

$$lk = 32{,}6\ (1)$$

считая, что

$$32{,}5 < lk < 32{,}7.$$

Отбрасывание величин малых высших порядков дает возможность установить ряд приближенных формул. Так напр., известно, что тепловой коэфициент объемного расширения для твердых тел принимается равным утроенному коэфициенту линейного расширения. Формула эта приближенная. Покажем ее вывод.

Если коэфициент линейного расширения равен α, то это значит, что при нагревании на 1° длина равная единице получает приращение α, т. е. становится равной $1 + \alpha$; объем равный единице станет равным $(1 + \alpha)^3 = 1 + 3\alpha + 3\alpha^2 + \alpha^3$; отбрасывая величины второго и третьего порядка видим, что приближенно $(1 + \alpha)^3 \doteq 1 + 3\alpha$, т. е. приращение объема равно 3α. Для длины l_0 и объема v_0 при нагревании на t° соответственно получим:

$$l_t = l_0(1 + \alpha t)$$

$$u_t = v_0(1 + 3\alpha t).$$

Приводим ряд приближенных формул, основанных на пренебрежении малыми величинами высших порядков. Вывод их весьма прост.

$$(1 \pm \alpha)^2 \doteq 1 \pm 2\alpha \tag{7}$$

$$(1 \pm \alpha)^3 \doteq 1 \pm 3\alpha \tag{8}$$

$$(1 \pm \alpha)^n \doteq 1 \pm n\alpha \text{ для } n \text{ целого и положительного} \tag{9}$$

$$(1 + \alpha)\cdot(1 \pm \beta) \doteq 1 + \alpha \pm \beta \tag{10}$$

$$(1 - \alpha)\cdot(1 \pm \beta) \doteq 1 - \alpha \pm \beta \tag{11}$$

$$\frac{1}{1 \pm \alpha} \doteq 1 \mp \alpha. \tag{12}$$

Формула (12) получается путем деления.

Напр. $\frac{1}{1+\alpha}=1-\alpha+\frac{\alpha^2}{1+\alpha}$ остаток малая величина 2-го порядка.

$$\frac{1+\alpha}{1\pm\beta}\doteq 1+\alpha\mp\beta. \tag{13}$$

$$\frac{1-\alpha}{1\pm\beta}\doteq 1-\alpha\mp\beta. \tag{14}$$

$$\sqrt{1\pm\alpha}\doteq 1\pm\frac{\alpha}{2}; \tag{15}$$

последняя формула может быть получена, пользуясь приближенным равенством:

$$\sqrt{1\pm\alpha}\doteq\sqrt{1\pm\alpha+\frac{\alpha^2}{4}}=\sqrt{\left(1\pm\frac{\alpha}{2}\right)^2}=1\pm\frac{\alpha}{2},$$

так как $\frac{\alpha^2}{4}$ величина малая 2-го порядка и может быть не только отбрасываема, но и прибавляема.

$$\sqrt[3]{1\pm\alpha}\doteq 1\pm\frac{\alpha}{3}. \tag{16}$$

$$\sqrt[n]{1\pm\alpha}\doteq 1\pm\frac{\alpha}{n}. \tag{17}$$

$$\frac{1}{(1\pm\alpha)^2}\doteq 1\mp 2\alpha. \tag{18}$$

$$\frac{1}{(1\pm\alpha)^3}\doteq 1\mp 3\alpha. \tag{19}$$

$$\frac{1}{(1\pm\alpha)^n}\doteq 1\mp n\alpha. \tag{20}$$

из (9), (17) и (20) вытекает, что $(1\pm\alpha)^n\doteq 1\pm n\alpha$ правильно для любого n целого, дробного, положительного и отрицательного.

Пример 19. Пользуясь приближенными формулами, найти $\sqrt{99{,}86}$.
$\sqrt{99{,}86}=\sqrt{100-0{,}14}=10\sqrt{1-0{,}0014}\doteq 10(1-0{,}0007)=9{,}993$.

Пример 20. Найти приближенно $\sqrt[3]{65}$, приняв $65=64+1$. Определить предельную погрешность приближенного результата.

Пример 21. Найти приближенно $\frac{1}{99}$; $\frac{1}{\sqrt{4{,}022}}$; $\frac{9{,}5}{100{,}45}$; $\sqrt{170}$; $\frac{\pi^2}{g}=\frac{9{,}97}{9{,}81}$; $\frac{\pi}{\sqrt{g}}$; $\frac{\sqrt[3]{1{,}008}}{(99{,}86)^3}$.

Выводы.

1. Число называют приближенным, когда оно представляет приближенное значение некоторой величины.

2. Абсолютной погрешностью числа называется разность между истинным и приближенным значением числа:

$$\alpha = x - a.$$

3. Приближенное число называют взятым с избытком, когда оно больше истинного, т. е. $a > x$, и взятым с недостатком, когда оно меньше истинного, т. е. $a < x$.

4. Предельной абсолютной погрешностью называется величина не меньшая, чем наибольшее мыслимое абсолютное значение абсолютной погрешности.

5. Если к данному приближенному числу прибавить и отнять от него предельную абсолютную погрешность, то получатся границы, между которыми лежит неизвестное истинное число.

6. Предельную погрешность можно увеличивать, но нельзя уменьшать.

7. Значащими цифрами числа, как целого, так и данного с десятичной дробью, называются все цифры, кроме нулей, стоящих впереди числа до первой цифры, отличной от нуля, служащие для указания разряда первой цифры. Для избежания нулей в конце целого числа, служащих для той же цели, либо превращают число в единицы высшей меры, либо изображают его как произведение числа, заключающего только точные цифры, на десять в некоторой степени.

8. При закруглении приближенных чисел и отбрасывании лишних знаков на конце числа, последнюю из оставшихся чисел увеличивают на единицу, если первая из отброшенных цифр равна 5 или больше. Если первая из отброшенных цифр равна 5, а за ней следуют нули, то последнюю из оставленных цифр закругляют до четной.

9. Относительной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности к самому истинному или приближенному числу.

10. Предельной относительной погрешностью называется абсолютное значение отношения предельной абсолютной погрешности к истинному или приближенному числу.

11. Если число знаков перед запятой данного числа a равно m, а общее число значащих цифр равно n, предельная абсолютная погрешность числа равна половине единицы последнего знака, то предельная относительная погрешность

$$\delta = \frac{1}{2a \cdot 10^{n-m}};$$

если первая цифра числа a равна z, то проще, хотя и грубее

$$\delta = \frac{1}{2z\,10^{n-1}};$$

если же первая цифра неизвестна, а известно только n, то приходится принять еще грубее:

$$\delta = \frac{1}{2\cdot 10^{n-1}}.$$

12. Если дана предельная относительная погрешность δ и требуется определить, с каким числом знаков надо взять число a, чтобы его погрешность не превысила δ, то в случае, когда первая цифра z числа a неизвестна, имеем

$$10^n = \frac{5}{\delta}, \qquad (21)$$

и если z известно:

$$10^n = \frac{5}{z\delta}. \qquad (22)$$

13. Уславливаясь считать α малой величиной первого порядка относительно данной a, если $q_1 < \frac{\alpha}{a} < q_2$, где q_1 и q_2 две правильные дроби (напр. $q_1 = 0{,}001$ и $q_2 = 0{,}0001$), будем считать величину λ, для которой $\frac{\lambda}{\alpha} < q_1$ малой величиной высшего порядка относительно a, и при большинстве вычислений не принимать во внимание.

Вопросы.

1. Почему во всех вопросах, связанных с вычислениями, на практике приходится иметь дело с приближенными значениями величин?

2. Чем отличается приближенное значение величины от неверного значения?

3. Придумать примеры, когда абсолютная погрешность некоторого приближенного значения: a) точно известна, b) известна приближенно, c) известна только по знаку и пределу и d) известна только по пределу.

4. Придумать примеры, когда при одной и той же абсолютной погрешности получаются разные относительные, и обратно, при одной и той же относительной погрешности получаются разные абсолютные погрешности.

5. Показать на примерах, почему о точности величины можно судить по относительной погрешности, но нельзя судить по абсолютной.

6. Выяснить, почему в численных таблицах целесообразнее, чтобы числа были даны с одним и тем же числом значащих цифр, а не с одним и тем же числом знаков после запятой.

7. Показать, почему нет надобности вычислять значение погрешности с большим числом значащих цифр и достаточно брать ее с одной или в крайнем случае двумя значащими цифрами, и почему при закруглении погрешности надо ее увеличивать, а нельзя уменьшать.

8. Почему при вычислении относительной погрешности надо делить абсолютную погрешность, закругленную в сторону увеличения, на самое число, закругленное в сторону уменьшения?

9. Показать на примерах, как может отличаться определение относительной погрешности в случае, когда: a) известна абсолютная погрешность и самое число, b) известно число точных значащих цифр числа и само число и c) когда известно только число точных значащих цифр числа.

10. Показать на примерах, как изменяется погрешность приближенных формул, если различным образом установить понятие относительно малой величины. В частности проверить на примерах, когда можно пользоваться приближенными формулами.

Глава II.

Сложение и вычитание.

§ 8. Сложение, абсолютная погрешность суммы.

Пусть даны числа

$$x = a + \alpha; \; y = b + \beta; \; z = c + \gamma;$$

складывая, получим

$$x + y + z = (a + b + c) + (\alpha + \beta + \gamma), \tag{23}$$

т. е.

абсолютная погрешность суммы равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых.

Теорема очевидно верна для любого числа слагаемых.

Погрешности α, β и γ могут быть разных знаков, и в этом случае погрешность суммы может оказаться меньше погрешности каждого из слагаемых; может даже случиться, что она равна нулю. Однако, если нам неизвестны самые погрешности, то мы принуждены брать предельные погрешности и притом, считаясь с возможностью худшего случая, брать их все с одним (положительным знаком. Таким образом:

предельная абсолютная погрешность суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых

$$\Delta_s = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3.$$

Пример 22. Найти, пользуясь таблицами:

$$\sin 10^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ + \cos 28^\circ.$$

Берем из таблицы

$$\begin{array}{rl}
\sin 10^\circ \doteq 0{,}1736 & (1/2) \\
\operatorname{tg} 15^\circ \doteq 0{,}2679 & (1/2) \\
\cos 28^\circ \doteq 0{,}8829 & (1/2) \\
\hline
\text{сумма} \doteq 1{,}3244 & (1\,1/2)
\end{array}$$

Если число знаков после запятой одинаково, и в каждом слагаемом предельная абсолютная погрешность равна половине единицы последнего знака, то при n слагаемых погрешность возрастает до $\frac{n}{2}$ единиц последнего знака. При $n = 10$ мы получим уже 5 единиц, и естестенно правильно будет отбросить последний знак, явно неточный, и взять на один меньше.

Пример 23. Рассмотрим случай, когда число знаков после запятой неодинаково: пусть требуется сложить приближенные числа

$$\begin{array}{rl}
581{,}35 & (1/2) \\
+\;28{,}4 & (1/2) \\
0{,}0427 & (1/2) \\
\hline
609{,}7927 & (550{,}5)
\end{array}$$

В самом деле первое слагаемое имеет погрешность 0,005, второе 0,05 и третье 0,00005, а всего 0,05505, следовательно на единицу последней значащей цифры 550,5. Совершенно ясно, что выписывание результата в таком виде совершенно бесцельно. Три последние цифры числа заведомо неверны, их надо отбросить.

Отсюда следует, что можно вычисление вести проще:

$$\begin{array}{r|l l}
581{,}3 & 5 & (0{,}05) \\
28{,}4 & & (0{,}5) \\
0{,}0 & 427 & (0{,}03) \\
\hline
609{,}7 & 9 & (0{,}58) \\
\text{или } 609{,}8 & & (0{,}7)
\end{array}$$

Правило получается следующее:

1) вертикальной чертой отделяем те цифры слагаемых, которые не могут дать в сумме точных значащих цифр;

2) у тех слагаемых, которые имеют цифры направо от черты, оставляем по одной цифре, зачеркивая остальные;

3) записываем величины погрешностей в долях единицы последней значащей цифры, стоящей налево от черты;

4) производим сложение и отбрасываем запасную цифру суммы, стоящую направо от черты, закругляя вместе с тем величину погрешности в сторону увеличения.

Следует заметить, что не нужно ни заучивать, ни запоминать такие правила. Необходимо на ряде примеров выяснить смысл и тогда пользование ими станет естественным.

Пример 24. Сложить

$$\begin{array}{rr|ll}
 & 752{,}8 & 61 & (0{,}02) \\
 & 0{,}2 & 5\cancel{68} & (0{,}04) \\
+ & 8{,}1 & & (0{,}5) \\
 & 57{,}3 & 5 & (0{,}05) \\
 & 0{,}0 & 0\cancel{27} & (0{,}03) \\
\hline
 & 818{,}5 & \cancel{7} & (0{,}64)
\end{array}$$

Ответ: 818,6 (1).

Пример 25. Сложить $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{9}+\sqrt{11}+\sqrt{13}$ с четырьмя значащими цифрами. Положим, мы имеем в своем распоряжении таблицы корней с пятью значащими цифрами. Делаем здесь выписку:

$$\begin{array}{rrr|ll}
 & \sqrt{3} \doteq & 1{,}732 & 1 & \\
 & \sqrt{5} \doteq & 2{,}236 & 1 & \\
+ & \sqrt{7} \doteq & 2{,}645 & 8 & \\
 & \sqrt{9} \doteq & 3{,}000 & 0 & \\
 & \sqrt{11} \doteq & 3{,}316 & 6 & \\
 & \sqrt{13} \doteq & 3{,}605 & 6 & \\
\hline
 & & 16{,}536 & 2 & (0{,}25)
\end{array}$$

Все данные, кроме $\sqrt{9}$, которое дано точно, даны с погрешностью ½ единицы последнего знака.

Ответ 16,536 (0,5).

§ 9. Вычитание, абсолютная погрешность разности.

Совершенно аналогично сложению получаем для вычитания

$$x = a + \alpha; \quad y = b + \beta$$
$$x - y = (a - b) + (\alpha - \beta)$$

Таким образом, если погрешность (α) и (β) известны, то мы имеем правило:

абсолютная погрешность разности равна разности абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого.

Если погрешности уменьшаемого и вычитаемого одинаковых знаков, то погрешность разности по абсолютной величине во всяком случае меньше наибольшей из двух погрешностей. Случайно она может даже оказаться равной нулю. Обычно однако же погрешности неизвестны ни по величине, ни по знаку. Наиболее неблагоприятным случаем является тот, когда погрешности разных знаков, а в этом случае при вычитании получится сумма их абсолютных величин, т. е. мы получаем правило:

предельная абсолютная погрешность разности равна сумме предельных абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого:

$$\Delta_{x-y} = \Delta_x + \Delta_y. \tag{24}$$

Пример 26.

$$\begin{array}{lcll}
\operatorname{tg} 15^\circ & \div & 0{,}2679 & (\tfrac{1}{2}) \\
\sin 10^\circ & \div & 0{,}1736 & (\tfrac{1}{2}) \\
\hline
\end{array}$$

$$\text{разность } \operatorname{tg} 15^\circ - \sin 10^\circ \div 0{,}0943 \quad (1)$$

Если уменьшаемое и вычитаемое имеют неодинаковое число знаков, то поступаем так же, как и при сложении, но здесь нет надобности переносить в разность лишнюю цифру. Мы только учитываем ее для оценки погрешности.

Пример 27.

$$\begin{array}{r|l}
52{,}83 & 2 \\
-\ 9{,}47 & \\
\hline
43{,}36 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
(0{,}25) \\
(0{,}5) \\
\hline
(0{,}75)
\end{array}$$

Пример 28.

$$\begin{array}{r|l}
\overset{1}{41{,}82} & 7 \\
-\ 6{,}51 & \\
\hline
35{,}32 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
(0{,}3) \\
(0{,}5) \\
\hline
(0{,}8)
\end{array}$$

Пример 29.

$$\begin{array}{r|l}
18{,}5 & \\
-\ 4{,}8 & 82 \\
\hline
13{,}7 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
(0{,}5) \\
(0{,}4) \\
\hline
(0{,}9)
\end{array}$$

Пример 30.

$$\begin{array}{r|l}
24{,}56 & \\
-\ 14{,}27 & 74 \\
\hline
10{,}28 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
(0{,}5) \\
(0{,}3) \\
\hline
(0{,}8)
\end{array}$$

Пример 31.

$$\begin{array}{r|ll}
\sqrt{13} = 3{,}605 & 6 & (0{,}05) \\
-\ \sqrt{5} = 2{,}236 & 1 & (0{,}05) \\
\hline
\sqrt{13} - \sqrt{5} = 1{,}369 & 5 & (0{,}1)
\end{array}$$

Ответ: 1,370 (0,6).

В случае, когда у уменьшаемого и вычитаемого известен один лишний знак, как в примере 31, мы пользуемся ни для вычитания и потом, отбрасывая его, учитываем погрешность.

Пример 32. Сложить

$$\begin{array}{r} 52{,}814 \\ 3{,}51 \\ +\ 0{,}234 \\ 0{,}0107 \\ 142{,}4 \\ \hline \end{array}$$

Пример 33. Сложить и получить сумму с тремя знаками после запятой

$$\begin{array}{r} 0{,}87324 \\ +\ 0{,}34152 \\ 0{,}27141 \\ 0{,}56212 \end{array}$$

Пример 34. Вычесть

$$\begin{array}{r} 15{,}82 \\ -\ 0{,}4751 \\ \hline \end{array}$$

Пример 35. Вычесть

$$\begin{array}{r} 48{,}562 \\ -\ 16{,}4 \\ \hline \end{array}$$

Пример 36.

$$\begin{array}{r} 56{,}871 \\ -\ 55{,}983 \\ \hline \end{array}$$

Пример 37.

$$\begin{array}{r} 31{,}5628 \\ -\ 28{,}3482 \\ \hline \end{array}$$

и получить разности с двумя знаками после запятой.

§ 10. Относительная погрешность суммы.

Пусть даны числа a, b, c с абсолютными погрешностями α, β, γ, так что

$$x = a + \alpha; \quad y = b + \beta; \quad z = c + \gamma,$$

где x, y, z точные значения чисел; тогда

$$x + y + z = (a + b + c) + \alpha + \beta + \gamma$$

и относительная погрешность суммы:

$$\varepsilon = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{a + b + c}; \tag{25}$$

обозначим $\varepsilon_1 = \frac{\alpha}{a}$; $\varepsilon_2 = \frac{\beta}{b}$; $\varepsilon_3 = \frac{\gamma}{c}$ относительные погрешности слагаемых, откуда

$$\alpha = a\varepsilon_1; \quad \beta = b\varepsilon_2; \quad \gamma = c\varepsilon_3$$

и следовательно

$$\varepsilon = \frac{a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3}{a + b + c}. \tag{26}$$

По предположению a, b, c числа положительные, так как речь идет об арифметическом сложении; что же касается α, β, γ, то они могут быть как положительны, так и отрицательны, а следовательно то же относится и к ε_1, ε_2, ε_3. Пусть все относительные погрешности не равны между собой. Положим ε_1 есть наибольшее и ε_3 наименьшее, т. е. $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$.

Очевидно, что

$$\frac{a\varepsilon_1+b\varepsilon_1+c\varepsilon_1}{a+b+c}>\frac{a\varepsilon_1+b\varepsilon_2+c\varepsilon_3}{a+b+c}>\frac{a\varepsilon_3+b\varepsilon_3+c\varepsilon_3}{a+b+c},$$

так как левый член неравенства получается из среднего заменой ε_2 и ε_3 на ε_1, т. е. на бо́льшую величину, а правый член заменой ε_1 и ε_2 на ε_3, т. е. на меньшую величину. Средний член равен ε, и после сокращения числителя и знаменателя крайних членов получим

$$\varepsilon_1>\varepsilon>\varepsilon_3,$$

т. е.

относительная погрешность суммы меньше наибольшей относительной погрешности и больше наименьшей относительной погрешности слагаемых.

Или иначе:

величина относительной погрешности суммы лежит в интервале, границами которого служат наименьшая и наибольшая из относительных погрешностей слагаемых.

Само собой разумеется, что все рассуждение относится к случаю, когда число слагаемых не только три, а больше, и точно так же когда мы имеем дело с предельными относительными погрешностями. В последнем случае все δ должны быть положительны (так как мы берем их абсолютные значения).

Отсюда следует, что если принять предельную относительную погрешность суммы равной предельной относительной погрешности того из слагаемых, которое дано наименее точно, то мы во всяком случае не сделаем ошибки. Однако же этим правилом обычно никогда не пользуются, так как во многих случаях такое определение погрешности дает слишком грубые результаты в том случае, когда одно из слагаемых дано с большей погрешностью. Это сразу видно на примерах.

Пример 38. $\sin 10^\circ \doteq 0{,}1736\ (^1/_2)$ $\quad \delta_1=\frac{1}{2\cdot 1500}=\frac{1}{3000}$

$\operatorname{tg} 15^\circ \doteq 0{,}2679\ (^1/_2)$ $\quad \delta_2=\frac{1}{2\cdot 2500}=\frac{1}{5000}$

$\cos 28^\circ \doteq 0{,}8829\ (^1/_2)$ $\quad \delta_3=\frac{1}{2\cdot 8500}=\frac{1}{17000}$

сумма $\doteq 1{,}3244\ (1\,^1/_2)$ $\quad \delta=\frac{3}{2\cdot 12000}=\frac{1}{8000}$

Мы получили $\delta = \frac{1}{8000}$, и если бы мы приняли $\delta = \delta_1 = \frac{1}{3000}$, то хотя и имели бы более грубый результат, но в общем одного порядка, так как погрешности слагаемых не очень сильно отличались одно от другого.

Пример 39.

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{tg} 1^\circ \doteq 0{,}0175\ (^1/_2); & \delta_1 = \dfrac{1}{2 \cdot 150} = \dfrac{1}{300} \\
\operatorname{tg} 89^\circ \doteq 57{,}2900\ (^1/_2); & \delta_2 = \dfrac{1}{2 \cdot 550000} = \dfrac{1}{1100000} \\
\hline
\text{сумма} \doteq 57{,}3075\ (1); & \delta = \dfrac{1}{550\,000}
\end{array}$$

Мы видим, что предельная относительная погрешность суммы меньше двух миллионных и принять ее за одну трехсотую, т. е. $\delta = \delta_1$, было бы чрезвычайно грубо. Поэтому для определения относительной погрешности суммы поставим себе за правило всегда **вычислять абсолютную погрешность** и помощью нее только относительную. Это дает гораздо более точные результаты и столь же просто. Особенно существенно поступать так в тех случаях, когда слагаемые даны с неодинаковым числом знаков после запятой. Там случается, как это было в примере 24 § 8, что одно из слагаемых было просто отброшено, т. е. принято равным нулю, а следовательно его относительная погрешность равна бесконечности.

Повторим этот пример с вычислением относительных погрешностей

Пример 40.

$$\begin{array}{rl|l}
 & 752{,}8 \,|\, 61 & (0{,}02) \quad \delta_1 = \dfrac{2}{700000} = \dfrac{1}{350000} \\
 & 0{,}2 \,|\, \overset{1}{5}63 & (0{,}04) \quad \delta_2 = \dfrac{4}{240} = \dfrac{1}{60} \\
 & 8{,}1 \,|\, & (0{,}5) \quad \delta_3 = \dfrac{5}{800} = \dfrac{1}{160} \\
 & 57{,}3 \,|\, 6 & (0{,}05) \quad \delta_4 = \dfrac{5}{50000} = \dfrac{1}{10000} \\
 & 0{,}0 \,|\, 027 & (0{,}03) \quad \delta_5 = \dfrac{3}{0} = \infty \\
\hline
\text{сумма} & 818{,}5 \,|\, 7 & (0{,}64) \quad \delta = \dfrac{1}{8000}
\end{array}$$

Ответ 818,6 (1)

Таким образом δ хотя и оказались больше, чем δ_1 и δ_4, но не только не равным бесконечности, но значительно меньше чем δ_2 и δ_3.

§ 11. Относительная погрешность разности.

Пусть дано $x = a + \alpha$; $y = b + \beta$

$$x - y = (a - b) + (\alpha - \beta)$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha - \beta}{a - b} \tag{27}$$

Совершенно очевидно, что о размере относительной погрешности разности ничего нельзя сказать. В самом деле, если предполагать a и b положительными, то ε может быть как положительным, так и отрицательным, причем может случиться, что при большом знаменателе числитель близок к нулю или даже равен нулю, а следовательно, ε очень мало или даже равно нулю. Может однако случиться, что если b мало отличается от a, знаменатель близок к нулю и дробь весьма велика. Если речь идет о предельной относительной погрешности разности, то получим:

$$\delta = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{a - b}. \tag{28}$$

Здесь величина δ не может быть равна нулю, но зато она может оказаться весьма большой величины.

Пример 41. $x = \operatorname{tg} 10° - \sin 10°$.

$\operatorname{tg} 10° \doteq 0{,}1763$ ($^1/_2$);	$\delta_1 = \frac{1}{2 \cdot 1500} = \frac{1}{3000}$
− $\sin 10° \doteq 0{,}1736$ ($^1/_2$);	$\delta_2 = \frac{1}{2 \cdot 1500} = \frac{1}{3000}$
разность $0{,}0027$ (1);	$\delta = \frac{1}{25} = \frac{1}{25}$

Нетрудно видеть отчего получается такой странный на первый взгляд результат. В самом деле, если бы например мы вздумали измерить толщину тонкостенной трубки таким образом, что сначала измерили бы наружный диаметр, а потом внутренний, то в случае, если трубка довольно широка, мы получили бы очень неточный результат. Внешний диаметр пусть будет 28,7 *мм*, и внутренний 28,3 *мм*, тогда толщина стенки окажется $\frac{28{,}7 - 28{,}3}{2} = 0{,}2$ *мм*.

Если измерение велось так, что погрешность не превышала 0,05 *мм*, то каждое из измерений сделано довольно хорошо. Погрешность измерений не превышает $\delta = \frac{1}{2 \cdot 250} = \frac{1}{500}$; погрещность разности же окажется $\delta = \frac{1}{4}$ и измерение стенки окажется сделанным чрезвычайно грубо.

Также неточно получится взвешивание малого количества вещества в тяжелом сосуде и потом взвешивание пустого сосуда.

Общее правило измерительной техники заключается в том, чтобы малую величину получать непосредственным измерением, а никак не путем вычитания двух приближенных значений неточных величин.

Пример 42. Вычислить $\frac{5}{7}+\frac{6}{9}$ и $\frac{5}{7}-\frac{6}{9}$, выразив дробь в десятичной форме с тремя знаками после запятой. Определить абсолютные и относительные погрешности.

Пример 43. Определить периметр пятиугольника, стороны которого измерены с погрешностью, не превышающей половину единицы последнего знака. $a = 5{,}83\ m$; $b = 2{,}17\ m$; $c = 0{,}44\ m$; $d = 4{,}21\ m$; $e = 0{,}18\ m$.

Пример 44. Вычислить $2\frac{7}{9} - \sqrt{7}$, выразив числа в десятичной форме с тремя знаками после запятой, и определить абсолютную и относительную погрешность результата. Известно, что $\sqrt{7} = 2{,}64575\ldots$

Пример 45. Вычислить $5{,}87 - 0{,}2856 + 4{,}11 + 0{,}0289 - 9{,}5$, где все числа даны с точностью до половины единицы последнего знака, и определить абсолютную и относительную погрешности.

Пример 46. Вычислить $\frac{4}{9} - \frac{7}{16}$, обратив обе дроби в десятичные с четырьмя значащими цифрами. Определить относительную погрешность разности.

Пример 47. Вычислить: $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$, взяв все числа в виде десятичных дробей с тремя десятичными знаками. Определить предельные абсолютные и относительные погрешности S и действительные абсолютные и относительные погрешности.

§ 12. Среднее арифметическое.

Во многих случаях для большей точности измерения некоторой величины измерение производится не один, а несколько раз, иногда даже много раз, и так как, благодаря неточности измерительных приборов и неточности восприятия, результаты измерения каждый раз оказываются не совсем одинаковыми, то приходится выбрать такую величину, которая по возможности содержала бы наименьшую погрешность. В качестве такой величины чаще всего берут среднее арифметическое из данных величин.

Прежде всего следует различать различные виды ошибок измерений:

1) **грубые ошибки**, являющиеся результатом невнимательности, неправильного использования прибора, описки при записи и т. д., которые дают отклонение, во много раз превышающее отклонения всех остальных измерений; данные, содержащие грубые ошибки, просто отбрасываются и не принимаются во внимание;

2) **систематические погрешности**, являющиеся результатом неточности приборов измерения, когда прибор дает систематически ошибки в одну сторону, как например вытянувшаяся от долгого употребления измерительная рулетка, или неправильно изготовленные весы. В некоторых случаях удается компенсировать эти погрешности. Например при взвешивании на весах, неправильность которых заключается только в неправильном весе чашек, можно взвешивать кладя один раз взвешиваемый предмет на левую чашку, а гири на правую, а другой раз наоборот. Средняя величина не будет уже содержать этой систематической ошибки. В других случаях необходимо иметь поправки для неправильно показывающих приборов. Особенно трудно устранить так называемые личные систематические погрешности, зависящие от индивидуальных особенностей наблюдателя. В случае подозрения возможности таких погрешностей, приходится делать наблюдения не одному, а двум или нескольким наблюдателям;

3) **случайные погрешности**, которые неизбежно должны быть при всяком измерении даже помощью наилучших приборов и при полном устранении систематических погрешностей в одну сторону. Относительно случайных погрешностей обычно делают *предположение*, что равные по величине, но различные по знаку погрешности встречаются одинаково часто при большом числе измерений. Если бы это действительно точно так было, то среднее арифметическое их всех наблюдений дало бы нам точное значение истинной величины.

На самом деле, конечно, предположение, высказанное выше, основывается на ряде систематических наблюдений, и можно только сказать, что действительно очень часто предположение это оправдывается довольно точно, а потому *весьма вероятно*, что среднее арифметическое более точно определяет собою истинную величину, чем какое-либо из случайно взятых измерений. Обоснование метода среднего арифметического подробнее излагается в курсах теории вероятностей и математической статистики. Во всяком случае широкое пользование этим методом в измерительной практике надо считать достаточно обоснованным, хотя никогда не надо забывать, что метод этот не имеет силы логически обязательного. Бывают случаи, когда другие способы определения средней величины (среднее геометрическое, медианное, модальное значения) дают лучшие, т. е. более ценные результаты, чем среднее арифметическое.

Здесь мы покажем только некоторые свойства среднего арифметического, покажем, как его вычислить и как оценить его погрешность.[1]

Пусть при ряде измерений одной и той же величины x, нами получены приближенные значения a_1, a_2, a_3... a_n, среднее арифметическое из которых:

$$a=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}a_i \tag{29}$$

Определим погрешность среднего арифметического.

Пусть погрешности

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x-a_1 \\ \alpha_2 &= x-a_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n &= x-a_n \end{aligned}$$

Складывая, получим

$$\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i=nx-\sum_{i=1}^{i=n}a_i.$$

Разделив обе части последнего равенства на n, получим:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i=x-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}a_i=x-a.$$

Таким образом погрешность среднего арифметического

$$x-a=\alpha=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i$$

равна среднему арифметическому из всех погрешностей отдельных данных. Если бы среди погрешностей было бы одинаковое число положительных и отрицательных, причем каждой положительной

---

[1] Если чтение этого параграфа покажется трудным, то его можно упустить без ущерба для понимания дальнейшего.

соответствовала равная ей отрицательная, т. е. $\alpha_e = -\alpha_k$, то очевидно

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i = 0, \text{ т. е. } a = x.$$

Так как на самом деле это в точности никогда не имеет места, то погрешность среднего арифметического не равна нулю. По изложенным нами правилам не удается определить даже приближенно величину этой погрешности. В самом деле, величины $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ нам неизвестны. В лучшем случае мы знаем предельные погрешности, которые мы предполагаем, при равноточных измерениях, равными между собою. Обозначив эту предельную погрешность через Δ, мы получим $\Sigma\Delta = n\Delta$ и

$$\frac{\Sigma\Delta}{n} = \Delta,$$

т. е. предельная погрешность среднего арифметического такова же, как и предельная погрешность каждого отдельного измерения, результат для нас совсем не ценный.

Воспользуемся теоремой, доказанной в предыдущем параграфе, о том, что относительная погрешность суммы меньше наибольшей и больше наименьшей из относительных погрешностей слагаемых. Абсолютная погрешность суммы Δ_s равна сумме абсолютных погрешностей:

$$\Delta_s = \sum_{i=1}^{i=n} (x - a_i);$$

относительная погрешность суммы

$$\delta_s \doteq \frac{\Sigma (x - a_i)}{nx}.$$

Если a_k обладает наибольшей погрешностью α_k и a_e обладает наименьшей α_e, то

$$\frac{\alpha_e}{x} < \delta_s < \frac{\alpha_k}{x},$$

откуда:

$$\alpha_e < \frac{\Sigma (x - a_i)}{nx} < \alpha_k,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} (x - a_i) = \Sigma x - \sum_{i=1}^{i=n} a_i = nx - na = n(x - a) = n\alpha$$

и следовательно

$$\alpha_e < \alpha < \alpha_k,$$

т. е. погрешность среднего арифметического больше наименьшей погрешности и меньше наибольшей погрешности всех чисел, средней от которых она является.

Полученный результат также не дает еще никакой возможности сколько-нибудь точно определить самую погрешность среднего арифметического; прежде всего нам неизвестны α_e и α_k, но даже если бы они были известны, мы не знали бы, к какой из этих величин ближе искомая величина α.

Рассмотрим теперь вместо погрешностей величины отклонений каждой из измеряемых величин от среднего арифметического, т. е. величины

$$\beta_1 = a - a_1; \ \beta_2 = a - a_2; \ \dots \ \beta_n = a - a_n.$$

Возьмем сумму этих отклонений

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = na - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

или

$$\sum_{i=1}^{i=n} \beta_i = na - \sum_{i=1}^{i=n} a_i,$$

но из вывода среднего арифметического следует

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i = na,$$

следовательно

$$\sum_{i=1}^{i=n} \beta_i = 0,$$

т. е.

сумма всех отклонений от среднего арифметического равна нулю.

Введем теперь еще новую величину: сумму квадратов отклонений от среднего арифметического, т. е.

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2 = (a - a_1)^2 + (a - a_2)^2 + \dots + (a - a_n)^2$$

или

$$\sum_{i=1}^{i=n} \beta_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (a - a_i)^2.$$

Раскроем правую часть последнего равенства:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \beta_i^2 = na^2 - 2a \sum_{i=1}^{i=n} a_i + \sum_{i=1}^{i=n} a_i^2$$

и заменяя опять $\sum\limits_{i=1}^{i=n} a_i = na$ получим окончательно

$$\sum_{i=1}^{i=n} \beta_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 - na^2. \tag{30}$$

Так как β_i не могут быть все равны нулю, то очевидно и правая часть не равна нулю, т. е. сумма квадратов отклонений не равна нулю. Корень квадратный из среднего арифметического суммы квадратов отклонений носит назьание среднего квадратичного отклонения

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\beta_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma a_i^2}{n} - a^2}. \tag{31}$$

Найдем теперь сумму квадратов отклонений данных нам приближенных чисел не от среднего арифметического a, а от какого-нибудь другого числа $b = a + \varepsilon$, где ε может быть как положительным, так и отрицательным.

$$\sum_{i=1}^{i=n} \gamma_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (b - a_i)^2$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \gamma_i^2 = nb^2 - 2b\sum_{i=1}^{i=n} a_i + \sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 =$$

$$= n(a+\varepsilon)^2 - 2(a+\varepsilon)\,na + \sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 =$$

$$= na^2 + 2na\varepsilon + n\varepsilon^2 - 2na^2 - 2na\varepsilon + \sum_{i=1}^{i=n} a_i^2;$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \gamma_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 - na^2 + n\varepsilon^2.$$

Сравнивая полученное выражение с (30), и принимая во внимание, что при любом ε, $n\varepsilon^2 > 0$, получим

$$\sum_{i=1}^{i=n} \gamma_i^2 > \sum_{i=1}^{i=n} \beta_i^2, \tag{32}$$

т. е.

среднее арифметическое обладает тем свойством, что сумма квадратов отклонений от него всех чисел, из которых оно выведено, меньше суммы квадратов отклонений тех же чисел от любого другого числа.

Можно было бы обратно, поставив себе задачей найти число, сумма квадратов отклонений от которого ряда данных чисел является наименьшим, доказать, что число это должно быть средним арифметическим. Подробнее это излагается в курсах теории вероятностей, а также в специальных курсах по выравниванию наблюдений по методу „наименьших квадратов". Вычисление среднего квадратичного отклонения является весьма полезным для оценки точности среднего арифметического. В самом деле, при одном и том же числе наблюдений n, в случае, когда все приближенные числа мало отличаются одно от другого, они очевидно все мало отличаются и от своего среднего арифметического и величина σ мала. Наблюдения были следовательно произведены хорошо, и среднее значение чисел весьма близко к истинному. Наоборот, если числа резко отличаются одно от другого, то по крайней мере для некоторых квадраты отклонений от среднего арифметического будут большими и следовательно σ будет большим. Вместе с тем и среднее арифметическое лишь случайно может оказаться близким к истинному, так как границы, внутри которых оно может находиться, станут сравнительно шире. В теории вероятностей устанавливается, что с большой степенью вероятности[1] можно утверждать, что предельная погрешность среднего арифметического

$$\Delta_a < \frac{3\sigma}{\sqrt{n-1}} \tag{33}$$

или проще, при n достаточно большом ($n > 10$) можно принять:

$$\Delta_a < \frac{3\sigma}{\sqrt{n}},$$

и так как

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\beta_i^2}{n}}$$

то

$$\Delta_a < \sqrt{\frac{\Sigma\beta_i^2}{n}} \tag{34}$$

---

[1] Вероятность эта выражается числом $\frac{997}{1000}$ т. е. равна вероятности, чтобы из мешка, в котором находится 997 белых шаров и 3 черных, не глядя и не отличая на ощупь, вынуть белый шар.

Рассмотрим пример. Пример не был бы показателен, если бы мы его придумали или если бы мы взяли числа из опыта. И в том и в другом случае истинная величина была бы неизвестна. Поэтому возьмем такой случай, когда известна истинная величина, а именно возьмем из таблиц значения $n\pi$ для $n = 491, 492, \ldots 510$, данные с точностью до одного десятичного знака. Из этих чисел путем деления на n вычисляем значение π с шестью десятичными знаками. Предельная погрешность данных в таблице чисел равна половине единицы последнего знака, т. е. 0,05. При делении на 491, 492... 510 мы в одно и то же число раз уменьшаем как само число, так и его погрешность. Предельные погрешности будут все около 0,0001, с наибольшим отклонением до 2% в сторону увеличения для $n = 491$ и в сторону уменьшения для $n = 510$, что существенного значения не имеет. Выписывая результаты деления с шестью цифрами после запятой, мы получаем предельные погрешности до 100 единиц последнего знака (точнее до 102 для $n = 491$ и до 98 для $n = 510$). Выпишем самые числа, и пользуясь тем, что мы знаем число π, возьмем его с семью десятичными знаками

$$\pi \doteq 3{,}1415927$$

и вычислим действительные погрешности α полученных чисел, выраженные в единицах шестого десятичного знака.

n	a_i	α_i	n	a_i	α_i
491	3,141548	+ 44,7	501	3,141517	+ 75,7
492	3,141667	− 74,3	502	3,141534	+ 58,7
493	3,141582	+ 10,7	503	3,141551	+ 41,7
494	3,141498	+ 94,7	504	3,141667	− 74,3
495	3,141616	− 23,3	505	3,141584	+ 8,7
496	3,141532	+ 60,7	506	3,141502	+ 90,7
497	3,141650	− 57,3	507	3,141619	− 26,3
498	3.141566	+ 26,7	508	3.141535	+ 57,7
499	3,141681	− 88,3	509	3,141650	− 57,3
500	3,141600	− 7,3	510	3,141569	+ 23,7

Найдем теперь среднее арифметическое из всех двадцати данных. Прежде всего укажем способ, значительно упрощающий нахождение среднего арифметического.

Если нам дан ряд чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$, то, представив себе каждое из этих чисел в виде суммы

$$a_1 = k + b_1;\ a_2 = k + b_2; \ldots\ a_n = k + b_n,$$

мы видим, что

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{nk + b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} =$$

$$= k + \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

Числа b_1, $b_2, \ldots$ b_n могут быть как положительными, так и отрицательными. Приняв число k близким к a (которое пока неизвестно), мы получим для b_1, $b_2, \ldots$ b_n сравнительно малые числа, что значительно облегчает вычисление.

В нашем случае, приняв $k = 3{,}141500$, мы получаем для b_1, $b_2, \ldots b_n$ таблицу, выраженную в единицах шестого десятичного знака

b_i	
48	
167	
82	
— 2	
116	
32	
150	
66	
181	
100	
17	
34	
51	
167	
84	
2	$\frac{1668}{20} = 83{,}4$
119	
35	
150	
69	
Сумма 1668	

следовательно, среднее арифметическое всех данных чисел

$$a = 3{,}141500 + 0{,}0000834 = 3{,}1415834.$$

Погрешность среднего арифметического

$$\alpha = 3{,}1415927 - 3{,}1415834 = +0{,}0000093.$$

Таким образом погрешность среднего арифметического 9,3 хотя и больше по абсолютному значению двух из полученных нами погрешностей, а именно $-7{,}3$ при $n=500$ и $+8{,}7$ при $n=505$, но меньше всех остальных 18 погрешностей. Вычислим теперь величины $\beta_i=a-a_i$ отклонений данных нам чисел от среднего арифметического (выраженных опять в единицах шестого десятичного знака), а также их квадраты β_i^2.

n	β_i	β_i^2
491	$+35{,}4$	1253,16
492	$-83{,}6$	6988,96
493	$+1{,}4$	1,96
494	$+85{,}4$	7293,16
495	$-32{,}6$	1062,76
496	$+51{,}4$	2641,96
497	$-66{,}6$	4435,56
498	$+17{,}4$	302,76
499	$-97{,}6$	9525,76
500	$-16{,}6$	275,56
501	$+66{,}4$	4408,96
502	$+49{,}4$	2440,36
503	$+32{,}4$	1049,76
504	$-83{,}6$	6988,96
505	$-0{,}6$	0,36
506	$+81{,}4$	6625,96
507	$-35{,}6$	1267,36
508	$+48{,}4$	2342,56
509	$-66{,}6$	4435,56
510	$+14{,}4$	207,36
Сумма	$+483{,}4-483{,}4=0$	63 549,80

$$\sigma=\sqrt{\frac{63549{,}80}{20}}\doteq 56{,}4.$$

Воспользуемся теперь приведенной выше формулой, выводимой из теории вероятностей для погрешности Δ_s среднего арифметического.

$$\Delta_a=\frac{3\sigma}{\sqrt{20-1}}=\frac{3\cdot 56{,}4}{\sqrt{19}}=38{,}7.$$

Таким образом с весьма большой степенью вероятности мы могли бы утверждать, что

$$\pi\doteq 3{,}1415834\ (387)$$

или

$$\pi \doteq 3{,}14158\ (4),$$

т. е.

$$3{,}14154 < \pi < 3{,}14162.$$

Так как мы знаем число π с любой степенью точности, то мы можем удостовериться, что погрешность среднего арифметического, выраженная в единицах шестого десятичного знака, на самом деле $\alpha = 9{,}3$, слишком в четыре раза меньше той предельной величины $\Delta = 38{,}7$, которую мы приняли.

Пример 48. Ряд измерений одного и того же расстояния помощью метровой линейки дал следующие результаты:

17,38; 17,42; 17,41; 16,37; 17,31; 17,45.

Отбросив измерение, содержащее грубую ошибку, определить среднее арифметическое, среднее квадратичное отклонение и предельную погрешность среднего арифметического.

Пример 49. При помощи хорошей 10-*м* рулетки то же расстояние, снова промеренное 5 раз, дало результаты:

17,385; 17,390; 17,375; 17,390; 17,380;

сделать те же вычисления, что и в примере 2 и сравнить разультаты.

Пример 50. Помощью ряда опытов был определен коэфициент внутреннего трения воздуха η:

0,00018227
0,00018257
0,00018229
0,00018258
0,00018232

Найти среднюю величину, а также среднее квадратичное отклонение.

Пример 51. Чрезвычайно важная для физики величина e заряда электрона была получена Милликэном из ряда опытов в 1916 году, из которых для $e^{2/3}\cdot 10^8$ был получен следующий ряд значений:

1	61,03	11	61,01	21	60,97
2	61,03	12	61,07	22	60,97
3	61,16	13	61,26	23	61,24
4	60,97	14	61,11	24	61,24
5	61,21	15	61,39	25	61,18
6	61,19	16	61,27		
7	61,20	17	60,94		
8	61,11	18	60,98		
9	61,05	19	61,20		
10	61,16	20	61,22		

Определить среднюю величину, среднее квадратичное отклонение и предельное отклонение.

Выводы.

1. Абсолютная погрешность суммы равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых.

2. П р е д е л ь н а я а б с о л ю т н а я п о г р е ш н о с т ь с у м м ы р а в н а с у м м е п р е д е л ь н ы х а б с о л ю т н ы х п о г р е ш н о с т е й с л а г а е м ы х.

3. Абсолютная погрешность разности равна разности абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого.

4. П р е д е л ь н а я а б с о л ю т н а я п о г р е ш н о с т ь р а з н о с т и р а в н а с у м м е п р е д е л ь н ы х а б с о л ю т н ы х п о г р е ш н о с т е й у м е н ь ш а е м о г о и в ы ч и т а е м о г о.

5. При сложении и вычитании число точных цифр после запятой у суммы или разности не превышает числа таковых же у того из чисел, которое имеет их наименьшее число. Для уменьшения погрешности рекомендуется у всех остальных чисел оставлять одной цифрой справа больше, и после произведения действия лишнюю цифру отбросить.

6. Относительная погрешность суммы есть величина, лежащая в интервале между наименьшей и наибольшей из относительных погрешностей слагаемых.

7. Относительная погрешность разности может во много раз превысить относительные погрешности уменьшаемого и вычитаемого.

8. С р е д н и м а р и ф м е т и ч е с к и м данных n чисел называется частное от деления суммы этих чисел на число n. Разность между средним арифметическим и одним из данных чисел называется о т к л о н е н и е м э т о г о ч и с л а о т с р е д н е г о а р и ф м е т и ч е с к о г о.

9. Сумма отклонений всех данных чисел от среднего арифметического от них равна нулю.

10. Сумма квадратов отклонений всех данных чисел от среднего арифметического от них меньше таковой же суммы отклонений от любого другого числа.

11. Корень квадратный из среднего арифметического от суммы квадратов отклонений называется средним квадратичным отклонением. При двух сериях измерений одной и той же величины, содержащих каждая по одинаковому числу данных, более точной серией является та, в которой среднее квадратичное отклонение меньше.

12. Предельная погрешность среднего арифметического Δ_a не может быть точно определена, если неизвестны предельные погрешности данных чисел. Если они известны, то Δ_a не превышает

предельной погрешности наиболее грубо данного числа. С большой степенью вероятности (хотя и недостоверно) можно утверждать, что предельная погрешность среднего арифметического не превышает $\Delta a \leqslant 3\sqrt{\frac{\sigma}{n-1}}$.

Вопросы

1. Может ли абсолютная погрешность суммы нескольких неточных чисел равняться нулю?

Рассмотреть примеры $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=1$, взяв все дроби приближенно в форме десятичных с 4, 5, 6 значащими цифрами.

Придумать самостоятельно несколько аналогичных примеров, причем, беря приближенные значения, можно просто отбрасывать лишние знаки, или закруглять с точностью до половины единицы последней значащей цифры.

2. Пользуясь таблицами логарифмов, проделать ряд примеров на нахождение логарифма произведения или частного путем нахождения суммы логарифмов сомножителей или разности логарифмов делимого и делителя. Находя по тем же таблицам непосредственно логарифм произведения и частного, проверить предельные погрешности суммы и разности. Например

$$\lg 247 = \lg(13 \cdot 19) = \lg 13 + \lg 19$$

$$\begin{array}{r} \lg\ 13 \doteqdot 1{,}11394 \\ \lg\ 19 \doteqdot 1{,}27875 \\ \hline \lg 247 \doteqdot 2{,}39269 \end{array}$$

По тем же таблицам $\lg 247 \doteqdot 2{,}39270$.

На этом основании установить, были ли даны $\lg 13$ и $\lg 19$ с избытком или с недостатком.

$$\lg 3927 = \lg(3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17) = \lg 3 + \lg 7 + \lg 11 + \lg 17$$

$$\begin{array}{r} \lg\ 3 \doteqdot 0{,}47712 \\ \lg\ 7 \doteqdot 0{,}84510 \\ \lg\ 11 \doteqdot 1{,}04139 \\ \lg\ 17 \doteqdot 1{,}23045 \\ \hline \lg 3927 \doteqdot 3{,}59406 \end{array}$$

По тем же таблицам непосредственно $\lg 3927 \doteqdot 3{,}59406$.

Чем объясняется, что погрешность не возрасла?

Проделать еще несколько аналогичных примеров.

3. В каких случаях при сложении и вычитании можно отбрасывать у данных чисел знаки, причем это не отразится на точности результата?

4. Если при сложении ряда чисел число знаков после запятой у слагаемых разные, то как может быть упрощено сложение?

5. Придумать два таких числа, заданных неточно, чтобы предельная относительная погрешность их суммы была бы в 10, 100, 1000 раз меньше относительной погрешности одного из них.

6. Может ли предельная относительная погрешность суммы или разности двух данных чисел оказаться больше предельных относительных погрешностей обоих чисел? Если это возможно, придумать примеры.

7. Может ли относительная погрешность или предельная относительная погрешность суммы или разности двух чисел оказаться меньше соответствующих погрешностей обоих заданных чисел? Если возможно, придумать примеры.

8. Почему выгоднее, получая из опыта какое-либо приближенное значение числа, получить его непосредственно, а не как сумму или разность двух приближенных значений? В каком случае (суммы или разности) это особенно существенно и почему?

9. Для какой цели находят среднее арифметическое ряда чисел?

10. Почему можно ожидать, что среднее арифметическое точнее дает значение неизвестного числа, чем любое из заданных чисел?

11. В чем заключается способ, упрощающий нахождение среднего арифметического?

12. Что называется отклонением данного числа от среднего арифметического?

13. Почему среднее квадратичное отклонение лучше определяет степень точности измерений, чем просто среднее арифметическое из отклонений?

14. Может ли случиться, что среднее арифметическое будет иметь абсолютную погрешность меньше абсолютных погрешностей всех чисел, из которых оно получено? Если возможно, придумать пример.

15. Те же вопросы 12 и 13 по отношению к предельным абсолютным погрешностям.

Глава III.

Умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня.

§ 13. Умножение и возведение в степень.

Даны два числа $x = a + \alpha$ и $y = b + \beta$.

$$z = x \cdot y = (a + \alpha) \cdot (b + \beta) = ab + \alpha b + \beta a + \alpha\beta.$$

Абсолютная погрешность произведения

$$\gamma = xy - ab = \alpha b + \beta a + \alpha\beta.$$

Принимая во внимание, что при α и β малых относительно a и b, $\alpha\beta$ есть величина малая второго порядка, отбрасываем ее, тогда

$$\gamma \doteq \alpha b + \beta a. \tag{35}$$

Если мы будем перемножать три сомножителя a, b, c с погрешностями α, β, γ, то очевидно получим для погрешности произведения

$$\lambda = ab\gamma + bc\alpha + ca\beta.$$

Аналогично можно получить формулу для погрешности любого числа сомножителей. Относительная погрешность произведения

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{z} = \frac{\alpha b + \beta a + \alpha\beta}{ab} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b}.$$

Но $\frac{\alpha}{a} = \varepsilon_1$ относительная погрешность первого сомножителя,

$\frac{\beta}{b} = \varepsilon_2$ относительная погрешность второго сомножителя.

Таким образом

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

или отбрасывая и здесь малую величину второго порядка $\varepsilon_1 \varepsilon_2$, получим

$$\varepsilon \doteq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \tag{36}$$

т. е.

Относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей сомножителей (с точностью до малых величин второго порядка)

Очевидно, что то же самое относится к произведению трех и более сомножителей, т. е. если даны числа $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, с относительными погрешностями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$, то погрешность произведения $\varepsilon \doteq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n$.

При переходе к предельным относительным погрешностям мы получаем то же правило, однако здесь необходимо еще выяснить допустимость отбрасывания малых величин второго порядка.

В самом деле, по известному правилу, предельную погрешность можно увеличивать, но нельзя уменьшать, а между тем, отбрасывая положительные величины, мы уменьшаем полученную сумму. На самом деле, однако же, в данном случае мы вправе отбросить эту величину.

Напомним, что при вычислении предельной относительной погрешности путем деления предельной абсолютной погрешности на само число, мы закругляем число в сторону уменьшения. Обычно мы оставляем в знаменателе только первую значащую цифру (изредка две), а остальные заменяем нулями. Во всяком случае мы уменьшаем знаменатель больше, чем на величину предельной абсолютной погрешности Δ. Но даже при уменьшении всего на Δ, мы настолько увеличим предельную относительную погрешность, что отбрасывание произведения $\delta_1 \delta_2$ явится законным.

Возьмем:

$$\delta_1' = \frac{\Delta_1}{a - \Delta_1} = \frac{\frac{\Delta_1}{a}}{1 - \frac{\Delta_1}{a}} = \frac{\delta_1}{1 - \delta_1}.$$

Но по одной из приближенных формул

$$\frac{1}{1 - \delta_1} \doteq 1 + \delta_1$$

и следовательно

$$\delta_1' \doteq \delta_1 (1 + \delta_1) = \delta_1 + \delta_1^2$$

(на самом деле δ_1 еще больше, но величины третьего порядка мы не пишем).

Точно так же

$$\delta_2' \doteq \delta_2 + \delta_2^2,$$

следовательно

$$\delta_1' + \delta_2' = \delta_1 + \delta_2 + (\delta_1^2 + \delta_2^2).$$

Наше увеличение предельной погрешности равно следовательно $\delta_1^2 + \delta_2^2$, а эта величина, как нетрудно показать, заведомо больше, чем отброшенная нами величина $\delta_1 \delta_2$.

В самом деле:

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 - 2\delta_1\delta_2 > 0$$

как квадрат некоторого числа $(\delta_1 - \delta_2)^2$, следовательно

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 > 2\delta_1\delta_2$$

и тем более

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 > \delta_1\delta_2,$$

что и требовалось доказать. Таким образом

предельная относительная погрешность произведения равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей.

Если один из сомножителей есть число точное, то его погрешность равна нулю, а следовательно:

при умножении приближенного числа на точное относительная погрешность не меняется.

Этим свойством относительной погрешности мы, собственно говоря, пользовались уже раньше.

Возведение в целую степень есть не что иное, как перемножение равных сомножителей. Отсюда нетрудно получить правило определения погрешностей степени. Для абсолютной погрешности квадрата, принимая: $x = a + \alpha$; $x^2 = a^2 + 2a\alpha + \alpha^2$ и отбрасывая малую величину второго порядка α^2, мы получим $\beta_2 \doteq 2a\alpha$.

Аналогично для третьей степени: из $x = a + \alpha$; $x^3 = a^3 + 3a^2\alpha + 3a\alpha^2 + \alpha^3$, отбрасывая малые величины второго и высших порядков, получим:

$$\beta_3 = x^3 - a^3 = 3a^2\alpha.$$

Наконец для любой степени n, пользуясь биномом Ньютона, получим $x^n = (a + \alpha)^n = a^n + na^{n-1}\alpha + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}\alpha^2 + \ldots + na\alpha^{n-1} + \alpha^n$, откуда из тех же соображений, пренебрегая членами высших порядков, получим

$$\beta_n = x^n - a^n \doteq na^{n-1}\alpha, \tag{37}$$

т. е.

абсолютная погрешность степени приближенно равна показателю степени, умноженному на основание в степени на единицу ниже и на абсолютную погрешность основания.

Если разделим абсолютную погрешность степени на самую степень, то для квадрата получим:

$$\eta_2 = \frac{\beta_2}{a^2} = \frac{2a\alpha}{a^2} = \frac{2\alpha}{a} = 2\varepsilon$$

и для куба:

$$\eta_3 = \frac{\beta_3}{a^3} = \frac{3a^2\alpha}{a^3} = 3\frac{\alpha}{a} = 3\varepsilon$$

и для степени n:

$$\eta_n = n\varepsilon. \tag{38}$$

Отсюда следует,

что относительная погрешность степени, а также предельная относительная погрешность степени равна показателю степени умноженному на соответственную относительную погрешность основания.

Что касается самого выполнения действия умножения над данными числами, то в случае когда числа даны приближенно, умножение может быть выполнено много проще, чем это обычно делается в элементарной арифметике. Рассмотрим пример:

$$x = 18{,}34 \cdot 4{,}5826.$$

Пусть оба эти числа даны с погрешностью до $^1/_2$ единицы последней значащей цифры.

Производим умножение обычным способом:

$$\begin{array}{r}
18{,}34 \\
\times \quad 4{,}5826 \\
\hline
11004 \\
3668 \\
14672 \\
9170 \\
7336 \\
\hline
84{,}044884
\end{array}$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2\cdot 1800}; \quad \delta_2 = \frac{1}{2\cdot 45000}; \quad \delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{52}{180000} < \frac{3}{10000}.$$

Абсолютная погрешность результата

$$\Delta \doteq 84\cdot\frac{3}{10000} \doteq 0{,}025.$$

Таким образом уже четвертая значащая цифра произведения может содержать погрешность больше 2 единиц, получение же остальных цифр просто не имеет смысла, Это очевидно, впрочем, и без вычисления погрешности. В самом деле, сомножители наши были взяты приближенно, следовательно они могли иметь еще значащие цифры вправо, которые нам неизвестны. Пометим их точками. Тогда в частных произведениях появились бы еще цифры, которых мы тоже не знаем и тоже пометим точками. Умножение приняло бы следующий вид:

```
         18,34...
       ×  4,5826...
       ------------
          .......
         .......
        .......
       1|1004..
       3|668..
    1 46|72..
    9 17|0..
   73 36|..
   ------------
   84,04|4884..
```

Мы видим, что все столбцы направо от проведенной нами вертикальной черты содержат точки, т. е. неизвестные нам цифры. Пользование ими для нас совершенно излишне, а следовательно и вычисление цифр, написанных направо от вертикальной черты, было совершенно ненужно. Этой вычислительной работы можно избежать, если начать умножение не с последней цифры множителя, а с первой, т. е. найти сначала $4 \times 18{,}34 = 73{,}36$, далее множить на вторую цифру, т. е. на 5, потом на 8, 2, 6; при этом можно будет с каждым разом уменьшать число цифр множимого, зачеркивая одну лишнюю справа. Действие располагаем следующим образом:

```
 18,34 · 4,5826
 --------------
 73,36|
  9,17|0
  1,46|7
     3|7
     1|1
 --------------
 84,04|5
```

Множим $4 \times 18{,}34$, подписываем первое произведение 73,36 и проводим вертикальную черту. Множим на 5 и пишем полученное произведение, сдвинув его на одну единицу н а п р а в о. Одну цифру вправо от вертикального столбца мы сохраняем в качестве запасной, чтобы уменьшить погрешность. Множим теперь на 8, но при этом зачеркиваем последнюю цифру 4 у множимого и принимаем ее во внимание лишь постольку, поскольку она отразится на следующей, т. е. $8 \times 4 = 32$, три в уме, $8 \times 3 = 24$, прибавляем 3, получаем $24 + 3 = 27$ и пишем 7 и т. д. При умножении на 2, зачеркиваем цифру три, и наконец, при умножении на 6, зачеркиваем цифру 8; полученное число 11 в последней строке произошло следующим образом: $6 \times 8 = 48$, закругляем его до 50 и держим 5 в уме; $6 \times 1 = 6$; $6 + 5 = 11$. Получив результат, отбрасываем цифру, стоящую направо от черты, и по правилу закругления в данном случае, так как отбрасываемая цифра 5, а предыдущая четная 4, получим: $18{,}34 \cdot 4{,}5826 \doteq 84{,}04$. Так как найденная нами погрешность $\delta = 0{,}025$, а мы еще закруглили последнюю цифру до единицы, то окончательно: $18{,}34 \cdot 4{,}5826 \doteq 84{,}04$ (3).

При таком способе умножения могло бы возникнуть одно только затруднение — в определении места запятой. Этот вопрос надо решать, что очень просто, при первом частном произведении; в нашем примере, умножая $18{,}34 \times 4$, находим 73,36 и сразу ставим запятую, тогда место запятой в полном произведении само собою получается. Особенно просто дело обстоит в случаях, когда множитель однозначное число, т. е. имеет впереди запятой только одну цифру. Но такое положение всегда может быть достигнуто на основании того, что произведение не изменится, если один из сомножителей увеличить, а другой уменьшить в одно и то же число раз. Благодаря этому можно всегда сделать множитель однозначным.

Например:

$$0{,}8345 \times 317{,}6 = 83{,}45 \times 3{,}176$$

или

$$317{,}6 \times 0{,}8345 = 31{,}76 \times 8{,}345.$$

В обоих случаях множитель имеет один знак перед запятой. Если почему-либо перенесение запятой в множителе неудобно, можно запомнить весьма простое правило относительно числа r знаков произведения при данном числе знаков p и q у сомножителей. Очевидно, что если a имеет p знаков и b — q знаков, то

$$10^{p-1} \leqslant a < 10^{p}; \qquad 10^{q-1} \leqslant b < 10^{q},$$

откуда

$$10^{p+q-2} \leqslant ab < 10^{p+q},$$

т. е. число знаков произведения ab, $r = p + q - 1$ или $r = p + q$; первый случай будет иметь место, когда произведение первой цифры множимого на первую цифру множителя дает двузначное число, второй случай когда оно дает однозначное (конечно при учете влияния следующих цифр).

Пример 52.

$$37{,}843 \times 141{,}26; \quad p=2; \quad q=3; \quad r=2+3-1=4$$
$$0{,}873 \times 4{,}561 \quad p=0 \quad q=1 \quad r=0+1=1$$
$$0{,}0567 \times 0{,}1326 \quad p=-1 \quad q=0 \quad r=-1+0-1=-2.$$

Рассмотрим теперь пример умножения, когда один из сомножителей имеет значительно больше значащих цифр, чем другой:

Пример 53.

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{5{,}834 \cdot 3{,}141592.} \\ \hline 17{,}502 & \\ 583 & 4 \\ 233 & 4 \\ 5 & 8 \\ 2 & 9 \\ & 5 \\ \hline 18{,}328 & 0 \end{array}$$

$$\delta = \frac{1}{2 \cdot 5800} + \frac{1}{2 \cdot 3000000} < \frac{1}{2 \cdot 5000} = \frac{1}{10000}.$$

$$\Delta = 18{,}33 \cdot 0{,}0001 \doteq 0{,}002.$$

Окончательно: $5{,}834 \times 3{,}141592 \doteq 18{,}328 \qquad (2)$

или $\doteq 18{,}33 \qquad (^1/_2)$

В этом примере умножение на последнюю цифру 2 у нас само собою выпало и если бы у множителя было еще больше цифр, то они нам все равно были бы ненужны. Даже умножения на 9 можно было бы избежать, если бы закруглить число π и взять вместо 5 число 6. Результат был бы тот же.

Попробуем взять в качестве множителя число с меньшим числом значащих цифр:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{3{,}141592 \cdot 5{,}834} \\ \hline 15{,}707\ 960 & \\ 2{,}513\ 274 & \\ 94\ 248 & \\ 12\ 565 & \\ .\ \ldots & \\ \hline 18{,}328\ 048 & \end{array}$$

Нетрудно видеть, что при последнем способе умножения мы сделали много лишнего, получив цифры явно ненужные. Выгоднее умножать, взяв в качестве множителя числа с большим числом значащих цифр. Еще проще однакоже запомнить, что в случае

когда сомножители имеют неравное чивло значащих цифр, следует у тоге из них, которое имеет их больше, откинуть лишние, оставив лишь на одну больше, чем у другого.

Это видно из приведенных примеров, но это можно доказать и иначе.

Пусть число a имеет p значащих цифр
и „ b „ q „ „
причем

$$q > p + 1$$

$$\delta_a = \frac{1}{2 \cdot z_1 \cdot 10^{p-1}}; \qquad \delta_b = \frac{1}{2z_2 \cdot 10^{q-1}},$$

где z_1 и z_2 первые значащие цифры чисел a и b.

Относительная погрешность произведения δ

$$\delta = \delta_a + \delta_\beta$$

и во всяком случае $\delta > \delta_a$. Обозначим первую значащую цифру произведения через z_3, а число точных значащих цифр его через r, тогда

$$\delta = \frac{1}{2z_3 \cdot 10^{r-1}}$$

и так как $\delta > \delta_a$, то при равных числителях знаменатель при δ должен быть меньше, чем при δ_a:

$$z_3 10^{r-1} < z_1 10^{p-1}.$$

Возьмем случай наименьшего z_3 и наибольшего z_1, а именно $z_3 = 1$, $z_1 = 9$:

$$10^{r-1} < 9 \cdot 10^{p-1} \quad \text{или} \quad 10^{r-1} < 10^p$$

$$r - 1 < p; \qquad r < p + 1.$$

Следовательно произведение не может иметь больше точных значащих цифр, чем сомножитель a, который имел их наименьшее число. Если мы допустим, чтобы произведение содержало погрешность больше половины единицы последней цифры, то в редких случаях могли бы допустить на одну единицу больше значащих цифр, но никак не более. Следовательно, при умножении числа b на a, мы в крайнем случае можем удержать у b $m + 1$ цифр. Остальные нам ненужны,

Пример 54. Определить объем конуса $v = \frac{1}{3}\pi r^2$, когда дано: $r = 45{,}8$ *мм* ($^1/_2$); $h = 134{,}7$ *мм* ($^1/_2$) и найти погрешность результата.

Принимая во внимание, что относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей сомножителей, а относительная погрешность квадрата — удвоенной относительной погрешности основания, и коэффициент $^1/_3$ число точное, получим:

$$\delta_v = \delta_\pi + 2\delta_r + \delta_h.$$

Так как h имеет четыре значащих цифры, а r всего три, то для π не имеет смысла удерживать больше 4 значащих цифр. Принимаем

$$\pi \doteq 3{,}142 \ (^1/_2)$$

$$\delta_\pi = \frac{1}{2\cdot 3000}; \quad \delta_r = \frac{1}{2\cdot 450}; \quad \delta_h = \frac{1}{2\cdot 1200};$$

$$\delta = \frac{1}{6000} + \frac{1}{450} + \frac{1}{2400} = \frac{6+80+15}{36000} = \frac{101}{36000};$$

берем закругляя $\delta = 0{,}003$.

Производим вычисления. Прежде всего, для большего удобства превращаем миллиметры в сантиметры.

Находим r^2:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{4{,}58 \cdot 4{,}58} \\ \hline 18{,}32 & \\ 2{,}29 & 0 \\ 36 & 6 \\ \hline 20{,}97 & 6 \end{array} \qquad r^2 \doteq 20{,}98 \ см^2.$$

Находим r^2h:

$$20{,}98\cdot 13{,}47 = \begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{209{,}8 \cdot 1{,}3\dot{4}\dot{7}} \\ \hline 209{,}8 & \\ 62\ 9 & 4 \\ 8\ 3 & 9 \\ 1\ 4 & 7 \\ \hline 282{,}6 & 0 \end{array}$$

$r^2h \doteq 282{,}6$ *см*^{3}.

Находим $\pi r^2 h$:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{282{,}6 \cdot [illegible]2} \\ \hline 847{,}8 & \\ 28\ 2 & 6 \\ 11\ 3 & 0 \\ 5 & 6 \\ \hline 887{,}9 & 2 \end{array}$$

$\pi r^2 h \doteq 887{,}9$ *см*^{3}.

$\frac{1}{3}\pi r^2 h \doteq 296{,}0$ *см*^{3}. $\qquad \Delta = 2{,}6\cdot 0{,}003 \doteq 0{,}9.$

Ответ $v = 296$ *см*^{3} (1).

Пример 55. Определить вес чугунной болванки цилиндрической формы, диаметр которой $d = 82$ *мм* (1), высота $h = 425$ *мм* (1), уд. вес $q = 7{,}2 \cdot 5$ (5).

ример 56. Определить число верных значащих цифр, если, приняв $^1/_7 \doteq 0{,}14286$, найти $(^1/_7)^3$ помощью возведения в куб 0,14286, а также предельную абсолютную и относительную погрешность полученного числа.

Пример 57. Определить объем комнаты по данным: длина $l = 4{,}57$ *м* $(^1/_2)$; ширина $a = 3{,}37$ *м* $(^1/_2)$; высота $h = 3{,}18$ *м* $(^1/_2)$. Найти предельную погрешность и выписать точные значащие цифры.

Пример 58. Вычислить: $5{,}27^3$; $0{,}0562 \times 158{,}35$; $61{,}21 \times 0{,}0032$, предполагая все числа данными с точностью до $^1/_2$ единицы последнего знака.

§ 14. Деление.

Дано $x = a + \alpha$; $y = b + \beta$. Погрешность частного равна разности между точным значением частного и его приближенным значением:

$$\gamma = \frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}.$$

Последнее выражение можно упростить, принимая во внимание, что

$$\frac{1}{b+\beta} = \frac{1}{b} - \frac{\beta}{b(b+\beta)};$$

получим:

$$\gamma = \frac{\alpha b - \beta a}{b^2} - \frac{\beta(\alpha b - \beta a)}{b^2(b+\beta)}.$$

Второй член очевидно величина малая второго порядка, так как в числителе мы имеем разность произведений двух малых величин на одну малую, а в знаменателе произведение трех больших величин. Отбрасывая этот член, получим

$$\gamma \doteq \frac{\alpha b - \beta a}{b^2}. \tag{39}$$

Предельная абсолютная погрешность получится из последней формулы заменой α и β через предельные абсолютные погрешности Δ_1 и Δ_2 и знака минус в числителе на знак плюс для случая наименее благоприятного. Получим

$$\Delta = \frac{\Delta_1 b + \Delta_2 a}{b^2}. \tag{40}$$

В этой формуле также отброшена величина второго порядка малости. Допустимость этого основывается, как и в случае умножения, на том, что при вычислении Δ мы закругляем значения a и b и притом, помня общее правило, в числителе закругляем в сторону увеличения, а в знаменателе в сторону уменьшения.

Относительная погрешность частного

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\frac{a}{b}} = \frac{(\alpha b - \beta a)\cdot b}{b^2 \cdot a} = \frac{\alpha b - \beta a}{ab} = \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{b} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \quad (41)$$

Предельная же относительная погрешность:

$$\delta = \frac{\Delta_1}{a} + \frac{\Delta_2}{b} \text{ или } \delta = \delta_1 + \delta_2. \quad (42)$$

Таким образом имеем теоремы.

1. Относительная погрешность частного равна разности относительных погрешностей числителя и знаменателя.

2. Предельная относительная погрешность частного равна сумме предельных относительных погрешностей числителя и знаменателя.

Если числитель число точное, то относительная погрешность частного равна относительной погрешности знаменателя, взятой с обратным знаком, если речь идет о самой погрешности, или со знаком плюс, если речь идет о предельной.

Следствие. Пусть $c = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; относительная погрешность знаменателя равна относительной погрешности основания, умноженного на показатель степени, а так как числитель — единица, число точное, то относительная погрешность c будет равна n-кратной относительной погрешности a, взятой с обратным знаком. В случае определения предельной относительной погрешности надо взять абсолютное значение погрешности знаменателя.

Таким образом имеем общее правило как на случай положительной, так и на случай отрицательной степени:

относительная погрешность степени (с целым показателем) **равна произведению показателя степени на относительную погрешность основания. Предельная относительная погрешность степени равна абсолютному значению показателя степени, умноженному на предельную относительную погрешность основания.**

При делении приближенных чисел, выраженных в форме десятичных дробей, получается также упрощение действий, которое ясно из примеров.

Пример 59.

$$\begin{array}{r|l} 5{,}273 & 2{,}128 \\ 4\,256 & 2{,}478 \\ \hline 1\,017 & 0 \\ 851 & 2 \\ \hline 165 & 80 \\ 148 & 96 \\ \hline 16 & 840 \\ 16 & 024 \\ \hline & 8160 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 5{,}273 & 2{,}128 \\ 4\,526 & 2{,}478 \\ \hline 1\,017 & \\ 851 & \\ \hline 166 & \\ 149 & \\ \hline 17 & \end{array}$$

В левой стороне произведено деление обычным способом, в правой сокращенно. В самом деле производить деление обычным способом явно не имеет смысла. Так как делимое число приближенное, то сносить нули нет основания. На четвертом, пятом и т. д. месте после запятой у делимого должны быть какие-то цифры, нам совершенно неизвестные, а потому все цифры, написанные направо от вертикальной черты, неверны и выписывать их незачем. После нахождения первой цифры частного 2 и вычитания 5,273—4,256, зачеркиваем последнюю цифру делителя и делим остаток 1,017 на 2,12, принимая во внимание отброшенную 8 лишь постольку, поскольку она при умножении на 4 отразится на последней цифре произведения. Умножаем следовательно таким образом: $4 \times 8 = 32$; 2 не пишем, а 3 запоминаем. $4 \times 2 = 8$; $8 + 3 = 11$, записываем 1 и в уме 1 т. д.

Рассмотрим теперь случаи, когда делимое и делитель имеют неодинаковое число значащих цифр.

Пример 60. $\begin{array}{r|l} 58{,}63274 & 967\ldots \\ 58\,02\ldots & 6{,}063 \\ \hline 61\ldots & \\ 58\ldots & \\ \hline 3\ldots & \end{array}$ **Пример 61.** $\begin{array}{r|l} 56{,}28715 & 2{,}39\ldots \\ 47\,8\ldots. & 23{,}5 \\ \hline 8{,}5\ldots & \\ 7\,2\ldots & \\ \hline 1{,}3\ldots & \end{array}$

Нетрудно видеть, что сносить цифру 2 к первому остатку не имело смысла, так как делитель число неточное, и если бы были известны следующие значащие цифры делителя, то первый остаток получился бы другой. Таким образом, если делитель имеет n значащих цифр, то у делимого имеет смысл использовать не более чем $n+1$ значащих цифр, а в некоторых случаях даже только n, как в примере 61. Обращаем внимание на то, что, не использовав цифр 8715 делителя, при нахождении первого остатка мы получим 8,5, а не 8,4, так как, отбрасывая цифру 8 делителя, мы должны увеличить предыдущую на единицу.

Возьмем теперь примеры, когда у делителя больше цифр, чем у делимого:

Пример 62.

$$\begin{array}{r|l}
38,56 & 12,3471 \\
\underline{37,04} & \overline{\;3,123} \\
1,52 & \\
\underline{1,23} & \\
29 & \\
\underline{25} & \\
4 &
\end{array}$$

Пример 63.

$$\begin{array}{r|l}
39,57 & 42,61375 \\
\underline{38\,35} & \overline{\;0,929} \\
1,22 & \\
\underline{85} & \\
37 &
\end{array}$$

В примере 62 мы использовали у делителя 4 цифры, а пятую учли лишь постольку, поскольку в первом произведении она отравилась на предыдущей. В примере 63 мы использовали всего 3 цифры и учли влияние четвертой. Таким образом получаем общее правило:

при делении, в случае, когда делимое и делитель имеют неодинаковое число значащих цифр, можно у того из них, которое имеет их больше, отбросить все лишние, оставив на одну цифру больше, чем у тоге, которое имеет их меньше.

Остается еще обратить внимание на способ определения места запятой в частном. Для этого не следует, как это часто рекомендуют в элементарной арифметике, увеличивать делимое и делитель так, чтобы делитель стал целым числом. Гораздо проще либо совсем не передвигать запятых, отделяющих целую часть числа, и определить место запятой до начала деления простой оценкой частного, либо передвинуть в делимом и делителе запятые так, чтобы делитель стал однозначным числом, т. е. имел перед запятой одну цифру. Тогда определение места запятой частного уже не представит затруднений. Делать это надо до произведения самого действия деления.

Пример 64. $35,87 : 0,568 = 358,7 : 5,68 = ..$

Нетрудно видеть, что при делении 358 на 5 получится число около 60, т. е. перед запятой будут две цифры, что и обозначено двумя точками.

Пример 65. $0,0873 : 0,691 = 0,873 : 6,91 = 0,...$

Пример 66. $0,0326 : 68,7 = 0,00326 : 6,87 = 0,000...$

Наконец, из выведенного выше правила для получения числа знаков произведения по числу знаков у сомножителей вытекает аналогичное правило для частного:

если число знаков делимого равно r, число знаков делителя p, то число знаков частного $q = r - p$ или $q = r - p + 1$, смотря по тому, будет ли первая цифра делимого меньше

или больше первой цифры делителя; если первые цифры одинаковы, то сравниваем вторые и т. д.

$$
\begin{array}{llll}
258{,}41 : 56{,}28; & r=3 & p=2 & q=3-2=1 \\
569{,}28 : 18{,}64; & r=3 & p=2 & q=3-2+1=2 \\
0{,}861 : 51{,}15; & r=0 & p=2 & q=0-2+1=-1 \\
0{,}18 : 0{,}056; & r=0 & p=-1 & q=0-(-1)=1 \\
5{,}861 : 0{,}5762; & r=1 & p=0 & q=1-0+1=2
\end{array}
$$

Все эти правила не надо заучивать, но нужно проделать ряд примеров, чтобы запомнить каждый из методов, только вникая в смысл действия и отыскивая способ упростить работу.

Пример 67. Произвести деление чисел в примерах 64, 65, 66.

Пример 68. Принимая большую полуось земного шара $a=6378{,}79$ *км*, меньшую 6356,91 *км*, определить величину сжатия $e=\frac{a-b}{a}$.

Предполагая, что числа даны с точностью до $^1/_2$ единицы последнего знака, получим:

$$a-b=21{,}88 \quad (1)$$

$$\delta_{a-b}=\frac{1}{2000}; \quad \delta_a=\frac{1}{2\cdot 600000}=\frac{1}{1200000};$$

$$\delta_e=\delta_{a-b}+\delta_a \doteq \frac{1}{2000}.$$

Делим: $6378{,}79 : 21{,}88 = 637{,}879 : 2{,}188$

```
637,88 |2,188
437 6  |291,5
 20028
 16692
   336
   219
   117
   109
     8
```

$$e=\frac{1}{291{,}5}.$$

Предельная относительная погрешность частного $\delta_e=\frac{1}{2000}$; отсюда

$$\Delta_{\frac{1}{e}}=291{,}5 : \frac{1}{2000} \doteq 300\cdot\frac{1}{2000} \doteq 0{,}15,$$

т. е. знаменатель e вычислен с точностью до 0,15, или, закругляя, с точностью до 0,2, т. е. до 2 единиц последней значащей цифры.

Пример 69. Определить длину латунной проволоки весом 1 *кг*, диаметр которой $d = 3{,}0$ *мм* ($^1/_2$), а удельный вес латуни $\rho = 8{,}7$ ($^1/_2$).

Вес $Q = \frac{\pi d^2 l \rho}{4}$; откуда $l = \frac{4Q}{\pi d^2 \rho}$.

Определяем погрешность l, считая Q числом точным:

$$\delta_l = \delta_\pi + 2\delta_d + \delta_\rho,$$

взяв

$$\pi = 3{,}14\,(0{,}2);\ \delta_\pi = \frac{1}{1500};\quad \delta_d = \frac{1}{2\cdot 30} = \frac{1}{60};\ \delta_\rho = \frac{1}{2\cdot 87} \doteq \frac{1}{160};$$

$$\delta_l = \frac{1}{1500} + \frac{2}{60} + \frac{1}{160} \doteq \frac{1}{25}.$$

Таким образом очевидно, что при вычислении нет смысла брать более 3 значащих цифр. Выражая d в сантиметрах и l в граммах, получим l тоже в сантиметрах.

$$d^2 = 0{,}30^2 = 0{,}0900;\ d^2\rho = 0{,}0900\cdot 8{,}7 = 0{,}783;$$

$$\pi d^2 \rho = 0{,}783\cdot 3{,}14 = 2{,}46;\quad l = \frac{4000}{2{,}46} = 1626\ \textit{см} = 16{,}3\ \textit{м};$$

$$\begin{array}{r} 0{,}783\cdot 3{,}14 \\ \hline 2{,}349 \\ 78 \\ 31 \\ \hline 2{,}458 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 4000 & 2{,}46 \\ \cline{2-2} 246 & 1626 \\ \cline{1-1} 1540 & \\ 1476 & \\ \cline{1-1} 64 & \\ 49 & \\ \cline{1-1} 15 & \end{array}$$

$$\Delta = l\delta_l = 16{,}3\cdot\frac{1}{25} \doteq 0{,}7.$$

Ответ: $l = 16{,}3$ *м* (7) или $l = 16$ *м* (1).

Пример 70. Определить значение тангенса угла прямоугольного треугольника $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ при данных катетах $a = 17{,}36$ ($^1/_2$), $b = 31{,}45$ ($^1/_2$).

Пример 71. Определить $\frac{1}{\pi}$ так, чтобы погрешность Δ была заключена в границах $0{,}0001 > \Delta > 0{,}00001$.

$$\pi = 3{,}14159265...$$

Сколько цифр надо взять при делении?

Пример 72. Определить удельный вес металлического шара, диаметр которого $d = 18{,}4$ *см* (1), а вес $22{,}7$ *кг* ($^1/_2$).

§ 15 Извлечение корня.

Дано $x = a + \alpha$; $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a + \alpha} = b + \beta$, где $b = \sqrt[n]{a}$.

Возводя обе части последнего равенства в n-ую степень, получим

$$a + \alpha = b^n + nb^{n-1}\beta + \frac{n(n-1)}{2} b^{n-2}\beta^2 + \ldots + nb\beta^{n-1} + \beta^n$$

и, пренебрегая членами 2-ой и высших степеней β, получим согласно формуле (37)

$$a + \alpha \doteq b^n + nb^{n-1}\beta.$$

откуда

$$\alpha \doteq nb^{n-1}\beta \tag{43}$$

и следовательно

$$\beta \doteq \frac{\alpha}{nb^{n-1}} = \frac{b\alpha}{nb^n} = \frac{\sqrt[n]{a} \cdot \alpha}{na};$$

такова абсолютная погрешность корня. Найдем относительную

$$\varepsilon_n = \frac{\beta}{b} \doteq \frac{\alpha}{na} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha}{a},$$

но $\frac{\alpha}{a} = \varepsilon$ есть относительная погрешность данного числа, следовательно

$$\varepsilon_n \doteq \frac{1}{n} \varepsilon, \tag{44}$$

т. е.

относительная погрешность корня n-ой степени равна приближенно относительной погрешности подкоренного числа, деленной на показателя корня.

Очевидно теорема имеет место и для предельной относительной погрешности, причем нетрудно показать, что в случае, если α и β положительны, отбрасывание членов высших порядков увеличивает предельную погрешность, что является допустимым, если же α и β отрицательны, то происходит уменьшение, для компенсации которого необходимо при определении предельной относительной погрешности закруглять знаменатель в сторону уменьшения на величину не меньшую, чем предельная абсолютная погрешность.

Следует обратить внимание на то, что в то время как при умножении, делении и возвышении в степень относительная погрешность возрастала, при извлечении корня она убывает и полученное после извлечения корня число оказывается более точным, чем данное.

Теорему об относительной погрешности корня можно объединить с теоремами об относительной погрешности степени с целым положительным или отрицательным показателем в одну при помощи изображения корня в виде степени с дробным показателем. Мы имеем следовательно при любом (целом, дробном, положительном или отрицательном) показателе степени теорему:

относительная погрешность степени равна показателю степени, умноженному на относительную погрешность основания.

Предельная относительная погрешность степени равна абсолютному значению показателя степени, умноженному на предельную относительную погрешность основания.

Пример 73. $a = 100$ (1), т. е. число $99 < a < 101$.

$\delta_a = \frac{1}{100}$; $b = \sqrt{a} = 10$ и согласно доказанной теореме

$\delta_b = \frac{1}{200}$, т. е. число

$$9,95 < b < 10,05.$$

В самом деле $9,95^2 = (10 - 0,05)^2 = 100 - 1 + 0,0025 = 99,0025$

$$10,05^2 = (10 + 0,05)^2 = 100 + 1 + 0,0025 = 101,0025$$

Следовательно с точностью до тысячных долей мы получили для a те же границы, какие нам были даны, приняв для b относительную погрешность в два раза меньше, чем для a.

Рассмотрим теперь вопрос о том, сколько точных значащих цифр можно получить при извлечении квадратного корня из числа a, заданного с n точными значащими цифрами. Без всякого вычисления кажется ясным, что так как относительная погрешность квадратного корня вдвое меньше относительной погрешности подкоренного числа, то у корня можно получить не меньше n точных значащих цифр.

Так оно и будет почти всегда, и лишь в случае, когда первая цифра корня больше первой цифры подкоренного количества по крайней мере в два раза, возможно, что n-ая цифра будет иметь погрешность равную единице. Случай этот возможен только тогда, когда подкоренное количество имеет первой цифрой единицу, а корень 3 или 2. В этом случае при абсолютной погрешности подкоренного числа

$$\Delta = {}^1/_2 \text{ единицы последнего знака}$$

относительная погрешность

$$\delta \leq \frac{1}{2 \cdot 10^{n-1}},$$

относительная погрешность корня:

$$\delta_1 = \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^{n-1}}$$

и абсолютная:

$$\Delta_1 = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^{n-1}} \cdot 3 \cdot 10^{n-1} = \frac{3}{4}.$$

Таким образом абсолютная погрешность корня будет равна $^3/_4$ единицы последнего знака и при закруглении может дать ошибку в целую единицу.

Для кубических корней и корней высших степеней такого неблагоприятного случая быть не может.

Таким образом мы получаем следующее правило: при извлечении квадратного корня из числа a, имеющего n точных значащих цифр, мы можем, вообще говоря, получить также n точных значащих цифр и притом не больше. В случае, когда число a имеет первой значащей цифрой единицу, возможно что n-ая значащая цифра корня окажется сомнительной. Во всяком случае $n-1$ цифр будут точными.

Этот худший случай возможен лишь при условии, если первая цифра корня равна двум или трем. Так как мы рассматривали здесь все время предельные погрешности, а самые погрешности почти всегда значительно меньше предельных, то часто при извлечении корня можно получить даже $n+1$ точных значащих цифр, зная только n цифр подкоренного числа.

Пример 74 $x = \sqrt{3,14}$. Извлекаем корень по общему правилу, даваемому в алгебре, как будто бы число 3,14 было точным.

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{3,14} = 1,7720 \\
 & 1 \\
27 & \overline{2,14} \\
7 & 1,89 \\
\overline{347} & \quad \overline{2500} \\
7 & \quad 2429 \\
\overline{3542} & \qquad \overline{7100} \\
2 & \qquad 7084 \\
\overline{3544} & \qquad\quad \overline{1600}
\end{array}$$

При извлечении $\sqrt{\pi}$, взятого с шестью значащими цифрами, можно получить $\sqrt{\pi} = 1,77245$. Таким образом на этом примере мы получим 4 точных цифры, имея у числа всего 3,

Пример 75. Возьмем теперь наиболее неблагоприятный случай: $3{,}29^2 = 10{,}8241$; таким образом

$$\sqrt{10{,}8241} = 3{,}29000 \text{ совершенно точно.}$$

Извлечем по обычному правилу $\sqrt{10{,}82}$, т. е. отбросим последние две цифры. Погрешность более 4 единиц последнего знака близка к предельной.

Получим

$$\sqrt{10{,}82} = 3{,}2894$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 9 \\
62 & \overline{1{,}82} \\
2 & 1{,}24 \\
\overline{648} & \quad\overline{5800} \\
8 & \quad 5184 \\
\overline{6569} & \qquad\overline{61600} \\
9 & \qquad 59121 \\
\overline{6578} & \qquad\; \overline{247900}
\end{array}$$

Сохранив всего 4 значащих цифры, мы получим $x = 3{,}289$, т. е. последняя значащая цифра имеет погрешность на целую единицу, погрешность, которую иногда можно допустить.

Перейдем теперь к упрощению действия извлечения корня.

Положим, что

$$\sqrt{a} = c + \gamma$$

$$a = (c+\gamma)^2 = c^2\left(1 + \frac{\gamma}{c}\right)^2 = c^2\left(1 + \frac{2\gamma}{c} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right).$$

Выберем теперь c так, чтобы $\frac{\gamma^2}{c^2} < \delta$ — предельной относительной погрешности числа a; тогда можно будет пренебречь этой величиной и принять

$$a \doteq c^2\left(1 + \frac{2\gamma}{c}\right) = c^2 + 2\gamma c.$$

Если число a имеет n точных значащих цифр и дано с точностью до $1/2$ последней значащей цифры, то, как мы знаем

$$\frac{1}{2\cdot 10^n} < \delta < \frac{1}{2\cdot 10^{n-1}}.$$

Возьмем $\left(\frac{\gamma}{c}\right)^2 < \frac{1}{2\cdot 10^n}$, т. е. меньше наименьшего возможного значения δ; тогда

$$\frac{\gamma}{c} < \frac{1}{\sqrt{2}\cdot 10^{\frac{n}{2}}};$$

возьмем

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{1}{2\cdot 10^{\frac{n}{2}}}.$$

Следовательно, рассматривая γ как предельную абсолютную погрешность числа c, мы видим, что число c должно иметь в этом худшем случае не менее $\frac{n}{2}+1$ точных значащих цифр, с точностью до половины последней значащей цифры.

Из приближенного равенства:

$$a \doteq c^2 + 2\gamma c$$

следует:

$$\gamma \doteq \frac{a-c^2}{2c}. \tag{45}$$

Таким образом, извлекая из a квадратный корень с n значащими цифрами, мы должны обычным точным способом найти первые $\frac{n}{2}+1$ значащих цифр корня в случае n четного или $\frac{n+1}{2}$ в случае n нечетного, которые дадут нам число c. Полученный остаток $a-c^2$ надо разделить на удвоенное найденное число, т. е. $2c$, и тогда мы получим γ, которое даст нам недостающие значащие цифры корня. Таким образом мы получим правило:

при извлечении корня с n значащими цифрами, достаточно по обычному способу получить больше половины искомых цифр. Разделив остаток на удвоенное найденное число, получим остальные искомые цифры.

Рассмотрим пример извлечения корня сначала из точных чисел.

Пример 76. Найти $\sqrt{2}$ с пятью значащими цифрами.

$$\sqrt{2} = 1{,}41$$

$$\begin{array}{r|r}
24 & 1 \\
\hline
4 & 100 \\
\overline{281} & 96 \\
\hline
1 & 400 \\
 & 281 \\
\hline
 & 119
\end{array}$$

После нахождения 3 цифр корня получен остаток 119 (точнее говоря 0,0119). Делим его на $2 \cdot 1{,}41 = 2{,}82$; получим

$$
\begin{array}{r|l}
119 & 2{,}82 \\ \cline{2-2}
113 & 42 \\ \cline{1-1}
6 &
\end{array}
$$

следовательно $\sqrt{2} = 1{,}4142$.

Так как в данном случае подкоренное количество точное, то при делении мы имеем право сносить нули и попробовать получить следующие цифры продолжением деления:

$$
\begin{array}{r|l}
1190 & 282 \\ \cline{2-2}
1128 & 422 \\ \cline{1-1}
620 & \\
564 & \\ \cline{1-1}
560 &
\end{array}
$$

Мы получим $\sqrt{2} \doteqdot 1{,}41422$, между тем как на самом деле $\sqrt{2} \doteqdot 1{,}41421$, т. е. шестая значащая цифра уже содержит погрешность, но всего на одну единицу (на самом деле даже меньше).

Пример 77. Возьмем теперь для извлечения приближенное число

$$
\sqrt{\pi} \doteqdot \sqrt{3{,}1416} \doteqdot 1{,}7725.
$$

$$
\begin{array}{r|rr}
 & 1 & \\ \cline{2-2}
27 & 2\,14 & \\
7 & 1\,89 & \\ \cline{1-2}
347 & 2516 & \\
 & 2429 & \\ \cline{2-2}
 & 87 & \multicolumn{1}{|l}{354} \\ \cline{3-3}
 & 71 & \multicolumn{1}{|l}{25} \\ \cline{2-2}
 & 16 &
\end{array}
$$

На самом деле $\sqrt{\pi} \doteqdot 1{,}772454\ldots$

Больше пяти точных цифр мы не могли ожидать, так как само число дано нам лишь с пятью точными цифрами.

Часто для получения квадратного корня пользуются таблицами корней или логарифмов. Но особенно это необходимо для корней высших степеней, так как арифметическое вычисление корней кубических очень утомительно, а для корней пятой и более высоких степеней арифметических правил вообще не существует.

В случаях, когда под руками нет логарифмических таблиц и надо быстро вычислить приближенно $x = \sqrt[m]{a}$, можно воспользоваться формулой, даваемой нами без вывода: [1]

$$x \doteq \frac{(m-1)x_0^m + (m+1)a}{(m+1)x_0^m + (m-1)a} x_0, \tag{46}$$

где x_0 первое грубое приближенное. Если обозначить предельную погрешность x_0 через Δ_0, что всегда можно грубо оценить, то предельная погрешность полученного числа x не превышает

$$\Delta = \frac{m^2 - 1}{12x_0^2}\Delta_0^3. \tag{47}$$

Способ этот можно рекомендовать лишь для извлечения корня невысокой степени. Для высокой степени и малого x погрешность получается слишком большой.

Пример 78. Пользуясь формулой (46), найти $\sqrt{2}$, приняв $x_0 = 1,5$ и зная, что $\Delta_0 < 0,1$.

$$x = 1,5 \cdot \frac{1,5^2 + 3 \cdot 2}{3 \cdot 1,5^2 + 2} = 1,5 \cdot \frac{8,25}{8,75} = \frac{3 \cdot 33}{2 \cdot 35} = \frac{99}{70} = 1,41428\ldots$$

$$\Delta = \frac{3 \cdot 0,1^3}{12 \cdot 2} - \frac{0,001}{8} = 0,000125.$$

Таким образом получен корень с точностью не менее 4 значащих цифр. На самом деле точность даже выше, так как $\sqrt{2} = 1,41421\ldots$

Пример 79. По той же формуле найти $\sqrt[3]{10}$. Принимаем $x_0 = 2$, $\Delta_0 < 0,2$, так как $2,2^3 = 10,6\ldots$

Следовательно

$$x = 2\frac{2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 10}{4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 10} = \frac{2 \cdot 56}{52} = \frac{28}{13} \doteq 2,1538$$

$$\Delta = \frac{8}{12 \cdot 4} 0,2^3 \doteq \frac{0,007}{3} \doteq 0,0013, \text{ т. е. } \sqrt[3]{10} \doteq 2,154 \ (2).$$

На самом деле $\sqrt[3]{10} = 2,1544$.

Пример 80. При свободном падении тела под действием силы тяжести высота падения в метрах

$$H = \frac{gt^2}{2},$$

[1] Вывод фор улы может быть сделан, основываясь на выведенной автором асимптотической формуле для решения уравнений. Известия Крымского педагогического института, т. II, 1929.

где

$g = 9{,}81 \frac{м}{сек^2}$ (1) ускорение силы тяжести и t время падения в секундах.

Определить t при $H = 0{,}60$ *м* (1) и предел погрешности результата.

Пример 81. Закон живой силы для свободного падения тела веса Q без начальной скорости с высоты H метров выражается

$$QH = \frac{mv^2}{2},$$

где v скорость в момент конца движения в $\frac{м}{сек}$, $m = \frac{Q}{g}$ — масса, $g = 9{,}81 \frac{м}{сек^2}$ (1), найти v, если $H = 25$ *м* ($^1/_2$).

Пример 82. Пользуясь формулой $\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ для периода колебания маятника длины l, определить τ в секундах, принимая $l = 0{,}9936$ *м* ($^1/_2$); $g = 980{,}6$ ($^1/_2$) для широты 45° и уровня моря.

Пример 83. Вычислить: $\sqrt{20{,}7}$ ($^1/_2$); $\sqrt{0{,}08769}$ ($^1/_2$); $\sqrt{\frac{37}{54}}$ с точностью до 0,1%; $\sqrt{\frac{1}{7}}$ с точностью до 0,05%.

Пример 84. Пользуясь данной нами формулой (46), определить $\sqrt[3]{27{,}5}$, воспользовавшись тем, что в таблицах кубов дано $2{,}7^3 = 19{,}683$; $2{,}8^3 = 21{,}952$.

Пример 85. Пользуясь той же формулой, вычислить $\sqrt[5]{50}$, зная, что $2^5 = 32$, и определить предел погрешности результата.

Выводы.

1. Абсолютная погрешность произведения приближенно равна произведению первого множителя на погрешность второго, сложенному с произведением второго множителя на погрешность первого.

$$x = a + \alpha;\ y = b + \beta;\ xy = ab + \gamma;$$

$$\gamma \doteq a\beta + b\alpha.$$

2. Относительная погрешность произведения приближенно равна сумме относительных погрешностей сомножителей.

$$x = a(1 + e_1);\ y = b(1 + e_2);\ xy = ab(1 + e);$$

$$e \doteq e_1 + e_2.$$

3. Предельная относительная погрешность произведения равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей

$$\delta = \delta_1 + \delta_2.$$

4. При умножении приближенного числа на точное относительная погрешность остается без изменений.

5. Абсолютная погрешность степени приближенно равна показателю степени, умноженному на основание, взятое в степени на единицу ниже, и на абсолютную погрешность основания.

$$b + \beta \doteq (a + \alpha)^n$$
$$\beta \doteq na^{n-1}\alpha.$$

6. Относительная погрешность степени приближенно равна произведению показателя степени на относительную погрешность основания.

$$b(1 + \varepsilon_2) = [a(1 + \varepsilon_1)]^n; \quad \varepsilon_2 \doteq n\varepsilon_1.$$

7. Предельная относительная погрешность степени равна произведению показателя степени на предельную относительную погрешность основания.

$$\delta_2 = n\delta_1.$$

8. При перемножении двух чисел, заданных с десятичной дробью, число знаков перед запятой у произведения равно сумме числа знаков у сомножителей или меньше этого числа на единицу.

$$r = q + p$$

или

$$r = q + p - 1.$$

9. При перемножении двух неточных чисел надо начинать с умножение множимого на старшую (т. е. стоящюю слева) цифру множителя и переходить дальше к следующим направо цифрам множителя. Первое частное произведения, полученное от умножения множимого на первую цифру множителя, определяет положение запятой в произведении, а также разряд последней справа цифры произведения, которую еще имеет смысл удержать, хотя она и может быть сомнительной. При умножении чисел с неравным числом значащих цифр, следует у того из них, которое имеет их больше, отбросить последние цифры, оставив лишь одной цифрой больше, чем у другого сомножителя.

10. Абсолютная погрешность частного равна приближенно произведению знаменателя на погрешность числителя минус произведение числителя на погрешность знаменателя, деленному на квадрат знаменателя.

$$x = a + \alpha;\ y = b + \beta;\ \frac{x}{y} = c + \gamma;\ \gamma \doteq \frac{b\alpha - a\beta}{b^2}.$$

11. Для получения предельной абсолютной погрешности частного надо взять оба члена числителя с положительными знаками.

12. Относительная погрешность частного равна приближенно разности относительных погрешностей числителя и знаменателя.

$$x = a(1 + \varepsilon_1);\ y = b(1 + \varepsilon_2);\ \frac{x}{y} = c(1 + \varepsilon);\quad \varepsilon \doteq \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

13. Предельная относительная погрешность частного равна сумме предельных относительных погрешностей числителя и знаменателя.

$$\delta = \delta_1 + \delta_2.$$

14. Относительная погрешность степени с отрицательным показателем равна приближенно произведению показателя степени на относительную погрешность основания.

$$b(1 + \varepsilon_2) = [a(1 + \varepsilon_1)]^{-n};\quad \varepsilon_2 \doteq -n\varepsilon_1.$$

15. Предельная относительная погрешность степени (для случая как положительной, так и отрицательной) равна произведению абсолютного значения показателя на предельную относительную погрешность основания.

$$\delta_2 = |n|\delta_1.$$

16. При делении приближенного числа на приближенное, действие упрощается благодаря тому, что к частным остаткам не имеет смысла приписывать нули, как это делается при делении точных чисел. Вместо этого, после каждой полученной цифры частного у делителя зачеркивается последняя справа цифра. В случае, если делимое и делитель имеют неодинаковое число значащих цифр, следует у того их них, которое имеет больше цифр, отбросить лишние справа, оставив лишь одной цифрой больше, чем у другого числа.

17. Число знаков частного q при данном числе знаков делимого r и делителя p равно

$$q = r - p \text{ или } q = r - p + 1,$$

смотря по тому, будет ли первая слева цифра делимого меньше или больше первой слева цифры делителя. При равенстве первых цифр, сравниваем вторые и т. д.

18. Относительная погрешность корня равна приближенно отно-

сительной погрешности подкоренного количества, деленному на показатель корня.

$$b(1+\varepsilon_2)=\sqrt[n]{a(1+\varepsilon_1)}; \qquad \varepsilon_2 \doteq \frac{\varepsilon_1}{n}.$$

19. Предельная относительная погрешность корня равна предельной относительной погрешности подкоренного количества, деленного на показатель корня. Отсюда следует, что теорема 15 верна и для случая дробного показателя степени.

20. При извлечении квадратного корня из числа, данного с n точными значащими цифрами, можно почти всегда в корне получить также n точных значащих цифр кроме случая, когда первая значащая цифра корня более чем вдвое превышает первую значащую цифру подкоренного количества; в этом случае n-ая цифра может содержать погрешность в одну единицу.

21. При извлечении квадратного корня с n значащими цифрами достаточно вычислить по общему правилу больше половины значащих цифр. Остальные могут быть получены простым делением остатка на удвоенное найденное число.

22. Извлечение корня, как квадратного, так и высших степеней, может быть приближенно выполнено по формуле

$$x=\sqrt[m]{a} \doteq \frac{(m-1)x_0{}^m+(m+1)a}{(m+1)x_0{}^m+(m-1)a}x_0,$$

где x_0 первое грубое приближение искомого корня. Если Δ_0 — предельная абсолютная погрешность x_0, то x получается с погрешностью:

$$\Delta_x < \frac{m^2-1}{12x^2}\Delta_0{}^3.$$

Вопросы.

1. Может ли случиться, что, в результате перемножения двух неточных чисел с абсолютными погрешностями α и β, абсолютная погрешность произведения окажется меньше абсолютных погрешностей каждого из сомножителей?

2. Можно ли ответить на вопрос, чему равна абсолютная погрешность произведения, когда оба сомножителя не даны, но известны их абсолютные погрешности?

3. Те же вопросы 1 и 2 относительно частного.

4. Придумать примеры, на которых можно было бы показать, что вычисление предельных относительных погрешностей по выведенным для умножения и деления правилам может дать результаты. во много раз превышающие истинные погрешности этих действий,

5. Почему при умножении двух приближенных чисел нет смысла выписывать все знаки частных произведений и можно упростить вычисление?

6. Почему при делении двух приближенных чисел нельзя к частным остаткам приписывать нули, а нужно зачеркивать последние цифры делителя?

7. Как по заданным двум приближенным числам можно, не производя их перемножения или деления, узнать число знаков и число точных значащих цифр произведения и частного?

8. Если приближенные числа даны с бо́льшим числом знаков, чем нам это необходимо, каким образом можно упростить себе работу умножения или деления зачеркиванием лишних цифр, но учесть эти лишние цифры для более точного определения предельных погрешностей результата?

9. Согласно правилу предельных относительных погрешностей для степени и корня предельная погрешность целой степени больше, а предельная погрешность корня меньше погрешности данного числа. Может ли случиться для самых погрешностей обратное, т. е. напр., чтобы относительная погрешность степени была меньше, а корня была больше, чем у данного числа?

10. Если у данного числа a n точных значащих цифр, то сколько точных значащих цифр будет у a^2, a^3, $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$? Можно ли ответить на этот вопрос, не зная ничего относительно числа a?

11. На чем основано правило, упрощающее извлечение квадратного корня? Попробовать на частных примерах взять точный квадрат числа, имеющего 3 значащих цифры; квадрат его будет иметь 5 или 6 значащих цифр; отбросить последние две или три цифры, оставив всего три, извлечь корень по изложенному способу.

Глава IV.

Прямая и обратная задача приближенных вычислений.

§ 16. Прямая задача. Вычисление погрешности сложных формул.

В предыдущих параграфах мы встречались уже с вычислением сложных формул и их погрешностей. Задача всегда ставилась нами так: вычислить значение некоторой функции, выраженной в виде формулы, и ее предельную погрешность при заданных численных значениях, входящих в формулу величин и их предельных погрешностях. Такого рода задача называется **прямой задачей** приближенных вычислений. В настоящем параграфе на ряде примеров рассмотрим наиболее целесообразные методы подхода к решению прямой задачи в случае сложных формул. Выше было установлено, что при сложении и вычитании проще определяется абсолютная погрешность, при умножении, делении, возведении в степень и извлечении корня проще определяется относительная погрешность. На основании формул:

$$\Delta = a\delta \text{ и } \delta = \frac{\Delta}{a}$$

по абсолютной погрешности всегда легко определить относительную и по относительной абсолютную.

На ряде примеров рассмотрим решение задач на определение погрешностей.

Пример 86. Определить $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ и погрешность результата Δc, когда даны Δa и Δb.

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{a};\ \delta_b = \frac{\Delta b}{b};\quad \delta_{a^2} = 2\frac{\Delta a}{a};\quad \delta_{b^2} = 2\frac{\Delta b}{b};$$

$$\Delta_{a^2} = a^2 2\frac{\Delta a}{a} = 2a\Delta_a;\quad \Delta_{b^2} = b^2 2\frac{\Delta b}{b} = 2b\Delta_b.$$

$$\Delta_{a^2+b^2} = 2a\Delta_a + 2b\Delta_b;\ \delta_{a^2+b^2} = \frac{2a\Delta_a + 2b\Delta_b}{a^2 + b^2};\ \delta_c = \frac{1}{2}\delta_{a^2+b^2};$$

$$\delta_c = \frac{a\Delta_a + b\Delta_b}{a^2 + b^2};\ \Delta_c = c\delta_c = \sqrt{a^2 + b^2}\cdot\delta_c;$$

$$\Delta_c = \frac{a\Delta_a + b\Delta_b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Дано: $a = 2{,}17(1/2)$; $b = 3{,}7(1/2)$.

$$\begin{array}{r} 2{,}17\cdot 2{,}17 \\ \hline 4{,}34 \\ 217 \\ 152 \\ \hline a^2 = 4{,}709 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}7\cdot 3{,}7 \\ \hline 11{,}1 \\ 259 \\ \hline b^2 = 13{,}69 \end{array}$$

$$a^2 + b^2 = 4{,}71 + 13{,}69 = 18{,}40$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{18{,}40} = 4{,}29$$

$$\begin{array}{r|l} & 16 \\ \hline 82 & 240 \\ 2 & 164 \\ \hline & 76 \;|\; 84 \\ & \quad\;\; 9 \end{array}$$

$$\Delta_c = \frac{2{,}2\cdot 0{,}005 + 3{,}8\cdot 0{,}5}{4} \doteq 0{,}05.$$

Ответ: $c = 4{,}29$ (5) или $c = 4{,}3$ (0,6).

Пример 87. Объем усеченного конуса

$$V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2).$$

Дано Δ_π, Δ_h, Δ_R, Δ_r, определить Δ_v.

$$\delta_\pi=\frac{\Delta_\pi}{\pi};\quad \delta_h=\frac{\Delta_h}{h};\quad \delta_R=\frac{\Delta_R}{R};\quad \delta_r=\frac{\Delta_r}{r};\quad \delta_{R^2}=\frac{2\Delta_R}{R};\quad \delta_{Rr}=\frac{\Delta_R}{R}+\frac{\Delta_r}{r}$$

$$\delta_{r^2}=\frac{2\Delta_r}{r};\quad \Delta_{R^2}=2R\Delta_R;\quad \Delta_{Rr}=r\Delta_R+R\Delta_r;\quad \Delta_{r^2}=2r\Delta_r.$$

$$\Delta_{R^2+Rr+r^2}=2R\Delta_R+r\Delta_R+R\Delta_r+2r\Delta r=(2R+r)\Delta_R+(R+2r)\Delta r,$$

$$\delta_{R^2+Rr+r^2}=\frac{(2R+r)\Delta_R+(R+2r)\Delta_r}{R^2+Rr+r^2};$$

$$\delta_v=\frac{\Delta\pi}{\pi}+\frac{\Delta h}{h}+\frac{(2R+r)\Delta_R+(R+2r)\Delta_r}{R^2-Rr+r^2};$$

$$\Delta_v=V\delta_v=\frac{1}{3}\{(R^2+Rr+r^2)(h\Delta\pi+\pi\Delta h)+\pi h[(2R+r)\Delta_R+(R+2r)\Delta_r]\}$$

При определении величины Δ_v надо помнить о возможности сократить себе работу помощью закругления цифр, так однако же, чтобы погрешность не уменьшалась.

Дано:

$R=18{,}4$ *см* (1/2); $r=9{,}6$ *см* (1/2); $h=24{,}7$ *см* (1/2); $\pi=3{,}14(0{,}2)$.

$$\Delta_R=0{,}05;\quad \Delta_r=0{,}05;\quad \Delta_h=0{,}05;\quad \Delta_\pi=0{,}002.$$

$$3\Delta_v\doteq(360+180+100)\cdot(25\cdot0{,}002+3{,}2\cdot0{,}05)+80\ (48\cdot0{,}05+$$
$$+38\cdot0{,}05)=640\cdot(0{,}05+0{,}16)+80\ (2{,}4\ \ 1{,}9)=$$
$$=640\cdot0{,}21+80\cdot4{,}3=536.$$

$$\Delta_v=0{,}2\ \textit{дм}^3$$

Таким образом ясно, что искомый объем надо вычислить только с точностью до 0,1 *дм*³. Превращаем все данные размеры в дециметры и вычисляем:

```
      1,84 · 1,84        1,84 · 0,96        0,96 · 0,96
      1,84               1,656              0,864
      1,472                1104               576
         74          Rr = 1,7664       r² = 0,9216
R² =  3,386
```

$$\begin{array}{r}3{,}386\\1{,}766\\0{,}9216\\ \hline R^2+Rr+r^2=6{,}074\end{array}\qquad 6{,}074:3=2{,}025$$

$$\begin{array}{l}2{,}025\cdot 3{,}14\\ \hline 6{,}075\\ 202\\ 81\\ \hline 6{,}358\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r}6{,}358\cdot 24{,}7\\ \hline 127{,}16\\ 2543\\ 445\\ \hline v=157{,}04\ \partial\text{м}\end{array}$$

Ответ: $v=157{,}0$ *дм* (3).

Во многих случаях, в особенности когда приходится производить только умножение, деление и возвышение в степень, можно значительно облегчить себе работу при помощи предварительного сокращения дробей. При этом в случае приближенных чисел нет надобности, чтобы числитель и знаменатель действительно содержали в качестве множителя то число, на которое они сокращаются. Мы в праве делать те или другие закругления чисел, лишь бы эти закругления были в пределах погрешности данных чисел.

Иногда можно выходить и за пределы погрешностей, но помнить, что в случаях изменения числителя и знаменателя надо их увеличивать или уменьшать в одном и том же отношении.

В самом деле, на основании приближенной формулы имеем:

$$\frac{a+\alpha}{b+\beta}=\frac{a\left(1+\frac{\alpha}{a}\right)}{b\left(1+\frac{\beta}{b}\right)}\doteq\frac{a}{b}\left(1+\frac{\alpha}{a}-\frac{\beta}{b}\right).$$

Таким образом, если разность $\left(\frac{\alpha}{a}-\frac{\beta}{b}\right)$ дает значительно меньше предельной относительной погрешности хотя бы одного из чисел a или b, то, несмотря на то, что $\frac{\alpha}{a}$ и $\frac{\beta}{b}$ каждые может быть и больше этих погрешностей, замена a на $a+\alpha$ при одновременной замене b на $b+\beta$ не изменит существенно погрешности результата.

Пример: $x=\frac{\pi}{19{,}45}=\frac{3{,}142}{19{,}45}$.

Числитель и знаменатель не сокращаются ни на 2, ни на 3, ни на 5, возьмем:

$$x_1=\frac{3{,}15}{19{,}5}=\frac{1{,}05}{6{,}5}=\frac{2{,}1}{1{,}3}.$$

Здесь $\frac{\alpha}{a}=\frac{8}{3142}$; $\frac{\beta}{b}=\frac{5}{1945}$; $\frac{\alpha}{a}-\frac{\beta}{b}=\frac{15560-15710}{3142\cdot 1945}$;

$$\left[\frac{\alpha}{a}-\frac{\beta}{b}\right]=\frac{150}{3142\cdot 1945}<\frac{150}{3000\cdot 1500}=\frac{1}{30000}.$$

Если погрешность знаменателя равнялась $^1/_2$ единицы последнего знака, то его относительная погрешность $\varepsilon=\frac{1}{2\cdot 1945}>\frac{1}{4000}$.

Таким образом один только знаменатель дает погрешность слишком в 7 раз бóльшую, чем полученная нами из-за изменения числителя и знаменателя.

Само собою разумеется, что при технических вычислениях нет надобности точно определять величину вводимой благодаря такому сокращению ошибки. При небольшом навыке нетрудно следить за тем, чтобы эта ошибка была значительно ниже допускаемой погрешности.

Пример 88. Индикаторная мощность паровой машины в лошадиных силах

$$N_i=\frac{P_i\ F\cdot S\cdot n}{30\cdot 75},$$

где P_i — среднее давление на поршень в *кг/см*²; F — площадь поршня в *см*²; S — ход поршня в метрах; n — число оборотов в минуту.

Вычислить N_i; при данных $P_i=6{,}3\ (^1/_2)$; $F=\frac{\pi d^2}{4}$; $d=28{,}4\ (^1/_2)$; $S=0{,}485\ (^1/_2)$; $n=120$;

$$\delta_N=\delta_p+\delta_F+\delta_s=\delta_p+\delta_\pi+2\delta_d+\delta_s.$$

$$\delta_p=\frac{1}{2.60}=\frac{1}{120};\ \delta_\pi=\frac{0{,}2}{300}=\frac{1}{1500};\ \delta_d=\frac{1}{2\cdot 250}=\frac{1}{500};$$

$$\delta_s=\frac{1}{2\cdot 450}=\frac{1}{900};$$

$$\delta_N=\frac{1}{120}+\frac{1}{1500}+\frac{1}{500}+\frac{1}{900}=\frac{75+6+18+10}{9000}=\frac{109}{9000}<\frac{1}{80};$$

$$N_i=\frac{\overset{0{,}097}{2{,}1}\cdot 3{,}14\cdot 28.4\cdot 28{,}4\cdot 0{,}485\cdot \overset{\overset{2}{8}}{120}}{\underset{10\cdot 5}{30\cdot 75\cdot 4}}$$

$$\begin{array}{r}\underline{3{,}14\cdot 2{,}1}\\ 6{,}28\\ 31\\ \overline{6{,}59}\end{array}\qquad \begin{array}{r}\underline{6{,}59\cdot 28{,}4}\\ 131{,}8\\ 52{,}7\\ \underline{2{,}6}\\ 187{,}1\end{array}\qquad \begin{array}{r}\underline{187{,}1\cdot 28{,}4}\\ 374{,}8\\ 14\ 97\\ \underline{75}\\ 5320\end{array}\qquad \begin{array}{r}\underline{53{,}2\cdot 9{,}7}\\ 478{,}8\\ \underline{37{,}2}\\ 516{,}0\end{array}\qquad \begin{array}{l}516{,}0\cdot 0{,}2=103{,}2\\ \Delta=103{,}2\cdot\frac{1}{80}\doteq 1{,}8.\end{array}$$

Ответ: $N_i=103$ л. с. (1,5).

В данном примере все сокращения были произведены без изменения чисел числителя или знаменателя.

Пример 89. Определить окружное усилие на шкиве электромотора. Вычисляем по формуле:

$$P=\frac{2\cdot 30\cdot 75\cdot N\cdot 1{,}000}{\pi\cdot n\cdot d};$$

где $N=43$ л. с. (1) мощность мотора, $n=975$ (5) число оборотов в минуту, $d=280$ *мм* (1) диаметр шкива.

$$P=\frac{\cancel{2}\cdot 30\cdot \cancel{75}\cdot 43\cdot 1000}{3{,}14\cdot \underset{13}{\cancel{975}}\cdot \underset{14}{\cancel{280}}}=\frac{129000}{3{,}14\cdot 13\cdot 14}.$$

До сих пор произведено сокращение только точное. Дальше сокращаем приближенно:

$$P=\frac{129000}{3{,}14\cdot 13\cdot 14}\doteq\frac{9920}{3{,}14\cdot 14}\doteq\frac{9920}{43{,}96}\doteq\frac{9920}{44}\doteq\frac{2480}{11}\doteq 225.$$

Определяем погрешность:

$$\delta_p=\delta_N+\delta_n+\delta_d+\delta_\pi\doteq\frac{1}{40}+\frac{1}{180}+\frac{1}{280}+$$

$$+\frac{1}{1500}\doteq\frac{38+9+6+1}{1500}=\frac{54}{1500}<\frac{1}{25};$$

$$\Delta_p=225\cdot\frac{1}{25}=9.$$

Ответ: $P=225$ *кг* (9).

При применении указанного метода нужна, конечно, осторожность. В данном случае у нас была одна большая погрешность $\delta_N=\frac{1}{43}>2\%$. Между тем при произведенных нами сокращениях мы вводили два раза новые погрешности, не превышавшие $\frac{1}{1000}$, которые очевидно поглощались уже этой одной большой погрешностью.

Во всех следующих примерах требуется не только найти искомую величину, но и предел ее погрешности.

Пример 99. Определить площадь сечения медного провода по формуле $q = \frac{2il}{57\varepsilon}$, где ε—допускаемое падение напряжения, i — сила тока, l—длина провода; $\frac{1}{57}$ — удельное сопротивление меди при 15°.

Дано $\varepsilon = 5v$ (0,5); максимум $l = 40a$; $l = 250$ *м* (10).

Пример 91. Определить вес 1 $м^2$ волнистого железа по формуле $Q = \left(55 + 134\frac{h}{b}\right)\delta$, где $h = 80$ *мм* (2) высота волны; b=200 *мм* (5) длина волны; $\delta = 2{,}5$ *мм* (1) толщина железа.

Пример 92. Определить осадку цилиндрической винтовой рессоры по формуле $h = \frac{64Pr^3n}{Gd^4}$, где $P = 100$ *кг* растягивающее усилие; $r = 10$ *см* ($^1/_2$) радиус витков; $d = 2$ *см* (0,01) диаметр сечения; $G = 8{,}5 \cdot 10^5$ *кг/см*^{2} ($^1/_2$) модуль упругости при сдвиге; $n = 20$— число витков.

Пример 93. Угол закручивания стержня длины l, круглого сечения F под действием момента силы M, выражается:

$$\varphi = \frac{Ml}{GI_p},$$

где I_p — полярный момент инерции стержня и G — модуль упругости при сдвиге. Определить φ при данных $M = 1200$ *кг м* (10); $l = 325$ *см* (1); $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ для круглого стержня диаметра $d = 8{,}2$ *см* (1); $G = 80 \cdot 10^4$ *кг/см*^{2} (1).

Пример 94. Наибольший прогиб балки под действием сосредоточенной в ее середине нагрузки Q *кг* равен $f = \frac{Ql^3}{48EI}$. Дано $Q = 500$ *кг* (5); $l = 215$ *см* (2) длина балки; E—модуль упругости, равный $20 \cdot 10^5$ *кг/см*^{2} ($^1/_2$); $I = 86{,}3$ *см*^{4} (1) момент инерции сечения двутаврового железа № 8.

Пример 95. Определить предельные абсолютную и относительную погрешности полинома $y = ax^2 + bx + c$ при заданных значениях x, a, b, c, Δx.

Пример 96. Определить объем бочки по формуле:

$$v=\frac{1}{15}\pi h\,(2D^2+Dd+0{,}75d^2),$$

где высота $h=84$ *см* (1); средний диаметр $D=56$ *см* (1); диаметры днищ $d=42$ *см* (1).

Пример 97. Определить объем цилиндрического кольца (тора) по формуле:

$$v=\frac{\pi^2}{4}Dd^2,$$

где $D=54$ *см* (0,5) диаметр средней линии кольца и $d=8{,}2$ *см* (0,5) его толщина.

Пример 98. Определить момент инерции кругового кольца, наружный диаметр которого $D=36$ *мм* ($^1/_2$) и внутренний $d=26$ *мм* ($^1/_2$), относительно его диаметра по формуле:

$$I_x=\frac{1}{64}\pi\,(D^4-d^4).$$

Пример 99. Определить площадь треугольника по формуле $F=\sqrt{p\ (p-c)\ (p-b)\ (p-c)}$, стороны которого $a=46{,}3$ ($^1/_2$); $b=29{,}7$ ($^1/_2$); $c=37{,}6$ ($^1/_2$); $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

§ 17. Обратная задача приближенных вычислений.

Перейдем теперь к рассмотрению задачи, заданной иначе, чем это было рассмотрено выше. Пусть опять требуется вычислить значение некоторой функции, зависящей от ряда других величин. Погрешности этих величин нам неизвестны, но зато поставлено условие, чтобы погрешность функции не превышала некоторой заданной нам величины. Требуется узнать, каковы могут быть предельные погрешности всех входящих в данную формулу величин. Задача, таким образом формулированная, называется обратной задачей приближенных вычислений. Как выяснится дальше на примерах, такого рода задача часто является неопределенной и требует введения дополнительных условий.

На практике часто приходится решать задачу такого рода: требуется определить какую-нибудь величину с заданной степенью точности. Величина эта не получается непосредственным измерением, а является результатом арифметических действий над некоторыми величинами, которые могут быть получены путем измерения.

Вопрос заключается в том, с какой степенью точности надо измерить эти величины, чтобы точность результата была не ниже заданной нам. Уменье решать такого рода задачи чрезвычайно важно для лабораторной техники. В самом деле, измерение может всегда быть произведено с различной степенью точности, смотря по приборам, примененным к измерению, и тщательности измерительной работы. Таким образом лабораторный работник сплошь и рядом стоит перед вопросом: с какой же точностью ему измерять? Недостаточная точность приведет к тому, что результат окажется слишком грубым и негодным; чрезмерная точность, в которой нет необходимости, может потребовать значительной затраты времени совершенно напрасно.

Рассмотрим сначала самые элементарные примеры:

Пример 100. С какой точностью надо измерить сторону квадрата, чтобы погрешность периметра квадрата не превышала 1 *см*? Пусть искомая предельная абсолютная погрешность стороны квадрата равна Δ. Тогда, зная, что при сложении абсолютные погрешности складываются, получим:

$$4\Delta = 1 \text{ см}; \qquad \Delta = \frac{1}{4} \text{ см} = 0{,}25 \text{ см}.$$

Измерение нужно произвести с точностью до $\frac{1}{4}$ *см*, причем эта величина не зависит от величины сторон квадрата.

Пример 101. С какой точностью надо измерить сторону квадрата, чтобы погрешность площади квадрата не превысила 1 *см*^{2}? Обозначим сторону квадрата через a. Тогда относительная погрешность измерения стороны $\delta_a = \frac{\Delta}{a}$; относительная погрешность площади квадрата

$$\delta_F = 2\frac{\Delta}{a}$$

и абсолютная погрешность площади

$$\Delta_F = \delta_F \cdot a^2 = 2a\Delta = 1 \text{ см}^2,$$

откуда

$$\Delta = \frac{1}{2a} \text{ см}.$$

Но длина a еще не измерена и следовательно неизвестна, а в таком случае Δ остается неопределенным. Задача как будто бы неразрешима. Решение ее возможно только, если a будет нам известно, следовательно надо действительно измерить сторону, но измерить ее грубо, так как при определении погрешности нам не нужна особая точность. Пусть $a \doteq 9$ *см*, тогда

$$\Delta = \frac{1}{2 \cdot 10} = \frac{1}{20} = 0{,}05,$$

т. е. сторона должна быть измерена с точностью до 0,5 миллиметра. Обращаем внимание, что мы увеличили знаменатель, т. е. взяли Δ меньше, а не больше, как мы привыкли это делать в предыдущих главах. В самом деле, нам нужно быть уверенными, что погрешность результата будет не больше 1 $см^2$, и следовательно мы должны измеряемые величины взять немного точнее, чтобы обезопасить себя от возможности получения слишком большой погрешности. Пусть мы произвели измерение и получили $a = 9{,}3$ (1/2).

$$\begin{array}{l} 9{,}3 \cdot 9{,}3 \\ \hline 83{,}7 \\ 28 \\ \hline 86{,}5 \ см^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \delta_a < \dfrac{1}{2 \cdot 90}; \quad \delta_a^2 < \dfrac{1}{90}. \\ \Delta_a^2 < 86{,}5 \cdot \dfrac{1}{90} < 1 \ см. \end{array}$$

Если бы сторона была около 5 *см*, то

$$\Delta_a = \frac{1}{2 \cdot 5} = 0{,}1 \ см,$$

т. е. можно было бы взять большую погрешность до 1 *мм*. Напротив, если бы $a = 20$ *см*, то

$$\Delta_a = \frac{1}{2 \cdot 20} = \frac{1}{40} \ см = 0{,}025 \ см.$$

Пример 102. С какой точностью надо измерить диаметр основания и высоту цилиндра, чтобы погрешность объема не превышала 0,5 $дм^3$; диаметр основания $d \doteq 20$ *см*; высота $h \doteq 80$ *см*?

$$v = \frac{\pi d^2 h}{4};$$

$$\delta_v = \delta_\pi + 2\delta_d + \delta_h.$$

Задача неопределенна, так как у нас три неизвестных величины — δ_π, δ_d и δ_h и всего одно уравнение. Мы должны ввести добавочные условия: погрешность δ_π не зависит от измерения и может быть сделана сколь угодно малой. Если принять $\pi = 3{,}1416$, то $\delta_\pi < \frac{1}{30000}$; для $\pi = 3{,}14$, $\delta_\pi < \frac{1}{1500}$.

Что касается δ_d и δ_h, то можно напр. принять их равными: $\delta_d = \delta_h = \delta$,

$$v \doteq \frac{3{,}2 \cdot 20^2 \cdot 80}{4} = 25600 \text{ см}^3 < 30 \text{ дм}^3; \quad \delta_v > \frac{1}{2 \cdot 30} = \frac{1}{60}$$

по сравнению с этой величиной δ_π даже при трех значащих цифрах столь мало, что ею можно пренебречь. Мы получаем:

$$\frac{1}{60} = 3\delta; \qquad \delta = \frac{1}{180},$$

откуда

$$\Delta_d = 20 \frac{1}{180} > 0{,}1 \text{ см},$$

$$\Delta_h = 80 \frac{1}{180} > 0{,}44 \text{ см}.$$

Таким образом мы получаем требование измерить диаметр с точностью до 0,1 *см*, а высоту до 0,4 *см*.

Ту же задачу можно решать и иначе, составив уравнение не для относительных, а для абсолютных погрешностей. Из формулы:

$$\delta_v = \delta_\pi + 2\delta_d + \delta_h$$

получаем

$$v\delta_v = \Delta_v = \frac{\pi d^2 h}{4}\delta_\pi + \frac{\pi d^2 h}{4} 2\delta_d + \frac{\pi d^2 h}{4}\delta_h,$$

или

$$\Delta_v = \frac{d^2 h}{4}\Delta_\pi + \frac{\pi d h}{2}\Delta_d + \frac{\pi d^2}{4}\Delta_h.$$

$$\frac{\pi d}{4}(2h\Delta_d + d\Delta_h) = \Delta_v - \frac{d^2 h}{4}\Delta_\pi.$$

Принимая $\pi = 3{,}14$; $\Delta_\pi < 0{,}002$ и зная, что $\Delta_v = 500$ *см*^{3}, получим, выражая d и h в сантиметрах:

$$\frac{\pi d}{4}(2h\Delta_d + d\Delta_h) \doteq 500 - 16 = 484;$$

$$2h\Delta_d + d\Delta_h \doteq \frac{484 \cdot 4}{3{,}2 \cdot 20} \doteq 30.$$

Для окончательного решения задачи надо еще сделать предположение об отношении $\frac{\Delta_d}{\Delta_h}$; здесь проще всего было бы принять $\Delta_d = \Delta_h = \Delta$;

тогда мы получили бы $(2h+d)\Delta \doteq 30$:

$$\Delta \doteq \frac{30}{160+20} = \frac{1}{6} > 0,1 \text{ см}.$$

Следовательно, приняв $\Delta = 0,1$ *см*, мы наверно бы удовлетворили поставленному условию задачи. Однакоже в этом случае мы вынуждены были бы как диаметр, так и высоту измерить с одной степенью точности, что является излишним. Приняв равными предельные относительные погрешности измеряемых величин, т. е. $\delta_d = \delta_h$; $\frac{\Delta_d}{d} = \frac{\Delta_h}{h}$; $\frac{\Delta_d}{\Delta_h} = \frac{d}{h} \doteq \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$, мы получим: $2h\Delta_d + 4d\Delta_d = 30$

$$\Delta_d = \frac{30}{160+80} = \frac{1}{8} \text{ см} > 0,1 \text{ см}; \quad \Delta_h = 4 \cdot \Delta_d = 0,5 \text{ см} > 0,4 \text{ см}$$

— те же результаты, как при первом способе вычисления.

Пример 103. С какой точностью надо измерить катеты a и b прямоугольного треугольника, чтобы погрешность гипотенузы c не превышала 0,5 *см*? Известно, что $a \doteq 5,3$ *дм*; $b \doteq 0,6$ *дм*.

В примере 86 § 16 задание III мы имели:

$$\Delta_c = \frac{a\Delta_a + b\Delta_b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Если для измерения длины потребовать одной и той же предельной абсолютной погрешности, т. е. принять $\Delta_a = \Delta_b = \Delta$, то

$$\Delta_c = \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Delta; \quad \Delta = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}\Delta_c;$$

$$\Delta > \frac{\sqrt{5^2+0,5^2}}{6} > 0,8\,\Delta_c.$$

Таким образом, приняв $\Delta = 0,8 \cdot 0,5 = 0,4$ *см*, мы удовлетворим требованию задачи.

Если потребовать одинаковых предельных относительных погрешностей для обоих катетов, то, принимая во внимание, что

$$\Delta_a = a\delta_a; \quad \Delta_b = b\delta_b \text{ при } \delta_a = \delta_b = \delta$$

получим

$$\Delta_c = \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\delta = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \delta = c \cdot \delta,$$

откуда $\delta = \frac{\Delta_c}{c} = \delta_c$, т. е. относительные погрешности измерения катетов равны относительной погрешности гипотенузы.

$$\delta > \frac{0{,}5}{\sqrt{5{,}5^2 + 0{,}8^2}} > \frac{0{,}5}{5{,}6} \doteq 0{,}09; \quad \Delta_a > 0{,}45\ \textit{см}, \quad \Delta_b > 0{,}05\ \textit{см}.$$

В этом случае оказывается целесообразнее принять равными не относительные, а абсолютные погрешности, так как это не потребовало бы столь точного измерения b до 0,05.

Из двух последних примеров должно быть ясно, что, в зависимости от характера задачи, иногда выгоднее делать одно предположение относительно погрешности, иногда совсем другое. Можно, конечно, для целого ряда случаев вывести заранее правила относительно наиболее выгодных предположений, однако же число таких правил было бы очень велико и все же не могло бы удовлетворить все случаи, которые могут встретиться на практике. Как общее правило можно запомнить, что в случаях, когда для вычисления искомой величины требуется произвести только действия сложения или вычитания, или их комбинации, то выгоднее всего у всех чисел брать одинаковую предельную *абсолютную погрешность*; если приходится производить только действия умножения, деления, возведения в степень и извлечение корня, то выгоднее брать для всех чисел одинаковую предельную *относительную погрешность*. В случае же комбинации всякого рода действий нельзя установить заранее более выгодных условий. Впрочем и от приведенных выше правил приходится часто отступать по различным соображениям, либо в силу особых условий измерительной техники, либо из соображений упрощения вычислительной работы.

Пример 104. Со сколькими десятичными знаками надо произвести извлечения корней или взять корни из таблиц, чтобы $x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ получить с двумя точными десятичными знаками?

Обозначим $\sqrt{5} = a$; $\sqrt{3} - \sqrt{2} = b$; $\sqrt{3} = c$; $\sqrt{2} = d$.

$$\delta_x = \delta_a + \delta_b.$$

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{x}; \quad \delta_a = \frac{\Delta_a}{a}; \quad \delta_b = \frac{\Delta_b}{b} = \frac{\Delta_c + \Delta_d}{b}; \quad \frac{\Delta_x}{x} = \frac{\Delta_a}{a} + \frac{\Delta_c + \Delta_d}{b};$$

принимая $\Delta_a = \Delta_c = \Delta_d = \Delta$, получим:

$$\frac{\Delta_x}{x} = \Delta\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right); \quad \Delta = \Delta_x \frac{(ab)\cdot b}{(b + 2a)\,a} = \frac{b^2}{2a + b}\Delta_x.$$

$$\Delta = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}\Delta_x = \frac{5 - 2\sqrt{6}}{2\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}\Delta_x.$$

Вычисляя приближенно и немного уменьшая числитель и увеличивая знаменатель, получим:

$$\Delta > \frac{5-2\cdot 2{,}45}{2\cdot 2{,}25+1{,}75-1{,}4}\Delta_x = \frac{0{,}1}{4{,}85}\Delta_x > 0{,}02\,\Delta_x;$$

по условию задачи: $\Delta_x = 0{,}005$; следовательно $\Delta = 0{,}0001$.

Таким образом для получения у x двух точных знаков после запятой приходится для всех корней взять 4 знака после запятой.

Вычисляем, беря из таблиц:

$\sqrt{5} = 2{,}2361;$
$\sqrt{3} = 1{,}7321;$
$\sqrt{2} = 1{,}4142;$
$\sqrt{3} - \sqrt{2} = 0{,}3179;$

$$\begin{array}{r|l} 2{,}2361 & 0{,}3179 \\ \underline{2{,}2253} & \overline{7{,}034} \\ 108 & \\ \underline{95} & \\ 13 & \end{array}$$

$x = 7{,}03.$

Тот же пример можно решить иначе, освободившись от корней в знаменателе:

$$x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = \sqrt{15}+\sqrt{10}.$$

Совершенно очевидно, что для получения двух точных десятичных знаков достаточно взять $\sqrt{15}$ и $\sqrt{10}$ с тремя десятичными знаками:

$$x = 3{,}873 + 3{,}162 = 7{,}035.$$

Взяв для проверки те же корни с 4 десятичными знаками, получим:

$$x = 3{,}8730 + 3{,}1623 = 7{,}0353.$$

Таким образом следует записать $x = 7{,}04$, если выписать два десятичных знака. Мы видим, что при первом способе решения задачи мы, несмотря на то, что взяли числа с 4 десятичными знаками, получили все же погрешность во втором десятичном знаке. Ошибки здесь не было никакой. В самом деле, абсолютная погрешность полученного нами ответа

$$\Delta = 7{,}0353 - 7{,}034 = 0{,}0013$$

заведомо меньше 0,005, но при отбрасывании последней цифры 4 у нас получилось суммирование погрешностей

$$0{,}004 + 0{,}0013 = 0{,}0053$$

и в результате погрешность оказалась, хотя и немного, но все же больше требуемой.

Такие случаи, сравнительно редкие, приходится учитывать, и правильнее всего записать ответ в виде $x = 8{,}034\ (5)$ не отбрасывая последней четверки. На этом же примере ясно видно, как важно преобразование формул, особенно для избежания вычитания.

Пример 105. С какой точностью надо измерить диаметр шара, чтобы абсолютная погрешность объема шара не превысила Δ_v? Решить пример численно, задав $\Delta_v = 1$ *см*^{3}; $d \doteq 5$ *см*, или $d \doteq 10$ *см*, или $d \doteq 20$ *см*. С какой точностью надо производить измерение, чтобы относительная погрешность не превысила δ_v? Принять $\delta_v = 0{,}0005$ и вычислить для тех же значений d.

Пример 106. В треугольнике дана сторона $a = 15{,}40$ *см* (0,1); противолежащий угол $A = 42°30'$; угол $B = 81°40'$; сторона $b = \frac{a}{\sin A} \sin B$. Со сколькими десятичными знаками надо взять с таблиц $\sin A$ и $\sin B$, чтобы получить b с точностью до двух десятичных знаков, т. е. $\Delta_b < 0{,}005$?

Пример 107. Каково наибольшее значение α, при котором погрешность приближенных формул: $(1+\alpha)^2 \doteq 1 + 2\alpha$; $\sqrt{1+\alpha} \doteq 1 + \frac{\alpha}{2}$; $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = 1 + 2\alpha$ не превышает 0,0001?

Пример 108. С какой точностью надо измерить наружный и внутренний диаметр кругового кольца, чтобы при определении момента инерции кольца относительно его диаметра предельная абсолютная погрешность не превышала 0,001 *см*^{4}, если приближенно $D = 3$ *см*; $d = 2{,}5$ *см* и известно, что $I = \frac{1}{64}\pi(D^4 - d^4)$?

Пример 109. С какой точностью надо измерить высоту h, наибольший и наименьший диаметры D и d бочки, чтобы вычислить объем $V = \frac{1}{15}\pi h \cdot (2D^2 + Dd + 0{,}75d^2)$ с точностью до 2 *л*, если приближенно $h \doteq 80$ *см*; $D \doteq 60$ *см*; $d \doteq 40$ *см*.

Пример 110. С какой точностью надо измерить стороны треугольника a, b, c, чтобы определить площадь по формуле $F = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ с точностью до 5 *см*^{2}? Приближенное $a = 45$ *см*; $b = 30$ *см*; $c = 35$ *см*; $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Пример 111. Площадь кругового сегмента, при радиусе круга r и центральном угле φ, равна: $F = \frac{r^2}{2}(\varphi - \sin\varphi)$.

С какой точностью надо взять из таблиц φ (в радианах) и $\sin\varphi$, чтобы относительная погрешность F не превышала 0,01%? Решить для $\varphi = 5°$, $45°$, $105°$, $175°$, предполагая, что φ задано точно.

Пример 112. Осадка цилиндрической винтовой рессоры вычисляется по формуле:

$$h = \frac{64Pr^3n}{Gd^4},$$

где P — растягивающее усилие, приложенное к рессоре, r — радиус витков, d — диаметр сечения, n — число витков, G — модуль упругости при сдвиге. Дано: $P = 100$ *кг*; $G = 8{,}5\cdot10^5$ *кг/см*^{2} ($^1/_2$). С какой точностью имеет смысл измерить r и d для определения необходимого числа витков n, так, чтобы $h = 5$ *см*? Число $n < 12$ определяется с точностью до единицы.

Выводы.

1. Прямой задачей приближенных вычислений называется задача вычисления значения некоторой функции и ее предельной погрешности при заданных значениях входящих в функцию величин и их предельных погрешностей.

2. Если при вычислении функции приходится производить действия сложения и вычитания, необходимо пользоваться абсолютными погрешностями чисел для вычисления погрешности результата.

3. Если при вычислении функции приходится производить только действие умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, то пользование относительными погрешностями чисел значительно упрощает вычисление погрешности результата.

4. При вычислении функций, в которые входят как сложение и вычитание, так и другие действия, целесообразнее всего при вычислении погрешности переходить от абсолютных погрешностей к относительным и обратно, смотря по действию, которое приходится производить.

5. При вычислении погрешности сложной функции удобнее всего выразить сначала окончательную погрешность в буквенном виде и лишь после того переходить к ее численному вычислению.

6. При вычислении формул, имеющих вид сложных дробей, т. е. таких, у которых числитель и знаменатель состоят из произведений нескольких множителей, можно производить сокращения числителя и знаменателя даже тогда, когда точное сокращение невозможно. Необходимо только учитывать, чтобы вводимые при этом новые относительные погрешности были значительно меньше погрешностей данных чисел.

7. Обратная задача приближенных вычислений заключается в определении предельных погрешностей величин, входящих в вычисляе-

мую нами функцию, при условии, чтобы предельная погрешность функции не превысила заданной величины.

8. Для решения обратной задачи, которая часто бывает неопределенной, приходится вводить добавочные условия об отношениях искомых погрешностей. Смотря по условию задачи обычно принимают равными либо все искомые абсолютные погрешности, либо относительные.

9. Для решения обратной задачи почти всегда необходимо хотя бы грубо знать те величины, предельные погрешности которых требуется определить.

10. В то время как при решении прямой задачи, при вычислении погрешности функции допускаются закругления чисел при условии у в е л и ч е н и я искомой погрешности, при решении обратной задачи допускаются закругления чисел при условии у м е н ь ш е н и я искомых погрешностей.

Вопросы.

1. В чем заключается прямая и в чем обратная задача приближенных вычислений?

2. Почему при решении обратной задачи можно у м е н ь ш а т ь, но нельзя увеличивать искомые погрешности, а при решении прямой, наоборот, можно у в е л и ч и в а т ь, но нельзя уменьшать?

3. Почему при вычислении формул, в которые входят только действия сложения и вычитания, нельзя пользоваться относительными погрешностями?

4. Должна ли предельная относительная погрешность сложной формулы быть больше предельных относительных погрешностей всех входящих в формулу величин? Придумать примеры, когда это не имеет места.

5. Можно ли ответить на вопрос: с какой точностью надо измерить диаметр круга, чтобы погрешность площади не превышала заданной величины α *см*^{2}? Нужно ли дать еще что-нибудь для возможности определенного ответа и что именно?

6. Пусть при определении объема прямого параллелепипеда со сторонами a, b, c, требуется, чтобы погрешность объема не превысила данной величины Δ. Надо узнать предельные погрешности a, b и c. Какая разница в ответах получится, если мы один раз поставим условие, чтобы все относительные погрешности были равны, а другой раз — чтобы все абсолютные погрешности были равны? В каких случаях удобнее ввести первое условие и в каких второе?

7. Придумать условие простой прямой задачи, т. е. вычисления погрешности результата по данным погрешностям входящих в формулу чисел. После решения попробовать решить ту же задачу как

обратную, т. е., приняв за данное окончательный результат прямой задачи, определить предельные погрешности входящих в формулу чисел. Должны ли мы всегда получить именно то, что было вначале нам дано? Если получатся другие ответы, то постараться выяснить, почему.

8. Как можно изменять числитель и знаменатель дроби, чтобы получить возможность сокращения и чтобы погрешность, введенная при изменении числителя и знаменателя, не отразилась на результате? Придумать ряд примеров.

Глава V.

Вычисления без точного учета погрешностей.

§ 18. Сложение и вычитание.

Очень часто, при необходимости спешно произвести вычисления, нет возможности задерживаться на определении погрешностей, в особенности если нет надобности знать вполне точно предел погрешности результата. Выше мы видели, что производство вычислений без всякого учета погрешностей часто требует больше времени и сил, чем вычисления с учетом, потому что из опасения допустить слишком большую погрешность результата приходится вычислять с бо́льшей степенью точности, чем это требуется условиями задачи. Поэтому необходимо изыскать еще и другие способы, хотя и менее совершенные, но все же дающие возможность грубо оценить степень точности полученного результата. Способы эти основаны на правилах подсчета числа точных цифр полученного результата.

Начнем со сложения и вычитания, при которых, как мы видели, приходится определять не относительные, а абсолютные погрешности. Кроме того, в главе второй было установлено, что при сложении ряда чисел нет никакого смысла брать у суммы больше цифр после запятой, чем их имеет то из слагаемых, у которого их меньше всего.

Рассмотрим сначала пример, где все слагаемые даны с одинаковым числом десятичных знаков.

Возьмем сумму синусов углов через 4 градуса от 0 до 40° и при этом сделаем вычисление дважды: один раз с четырьмя десятичными знаками, другой раз с семью десятичными знаками. Отдельным столбцом выписываем погрешности чисел, взятых с 4 знаками, выраженных в единицах седьмого десятичного знака (табл. 1).

Таблица 1.

Градусы	sinus	sinus	Δ
4	0,0698	0,0697565	— 435
8	0,1392	0,1391731	— 269
12	0,2079	0,2079117	+ 117
16	0,2756	0,2756374	+ 374
20	0,3420	0,3420201	+ 201
24	0,4067	0,4067366	+ 366
28	0,4695	0,4694716	— 284
32	0,52 9	0,5299193	+ 193
36	0,5878	0,5877853	— 147
40	0,6428	0,6427876	— 124
Сумма	3,6712	3,6711992	— 8

Случайно взятый нами пример оказывается особенно интересным. В самом деле, при пользовании правилом предельных абсолютных погрешностей, считая, что предельная погрешность неточных чисел равна $^1/_2$ единицы последнего знака, мы получили бы, что сумма должна иметь предельную погрешность $10 \cdot {}^1/_2 = 5$ единиц четвертого десятичного знака. Между тем взятая нами сумма 3,6712 имеет погрешность около 8 единиц седьмого десятичного знака. Таким образом погрешность оказалась в $\frac{5000}{8} \doteq 600$ раз меньше предельной.

В задании втором при вычислении среднего арифметического было уже обращено внимание на то, что действительные погрешности всегда бывают во много раз меньше предельных и пользование предельными объясняется тем, что, не зная истинных погрешностей, мы принуждены брать наивозможно худшие условия, какие только мыслимо себе представить. Конечно, в тех случаях, когда уверенность в правильности всех выписанных знаков для нас абсолютно необходима (а такие случаи в лабораторной практике нередки), приходится брать эти наихудшие условия и предполагать возможной такую погрешность, которая практически почти никогда не может встретиться. Чтобы выяснить это, рассмотрим особо простой случай, а именно предположим, что мы не знаем истинной погрешности и считаем погрешность равной своей предельной погрешности, т. е. $^1/_2$ единицы последнего знака. Зная, что погрешности могут быть как положительными, так и отрицательными, мы получим, что при сложении двух чисел a и b возможны четыре случая:

$$\begin{array}{llll}
1) & \Delta_a = -1/2 & \Delta_b = -1/2 & \Delta_a + \Delta_b = -1 \\
2) & \Delta_a = -1/2 & \Delta_b = +1/2 & \Delta_a + \Delta_b = 0 \\
3) & \Delta_a = +1/2 & \Delta_b = -1/2 & \Delta_a + \Delta_b = 0 \\
4) & \Delta_a = +1/2 & \Delta_b = +1/2 & \Delta_a + \Delta_b = 1
\end{array}$$

Присоединим третье слагаемое c с погрешностью $\Delta_c = \pm\frac{1}{2}$. Тогда каждый из 4 первых случаев с возможными двумя случаями для Δ_c даст всего 8 случаев, из которых, как нетрудно видеть, получится

$$\begin{array}{ll}
1 \text{ случай} & \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c = -1^1/_2 \\
3 \text{ случая} & \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c = -\ {}^1/_2 \\
3 \text{ случая} & \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c = +\ {}^1/_2 \\
1 \text{ случай} & \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c = +1^1/_2
\end{array}$$

Нетрудно составить таблицу в виде так называемого треугольника Паскаля, в котором проставлены числа возможных случаев, соответствующих погрешностям, написанным в верхней строке. В правом столбце записана общая сумма числа возможных случаев, в левом — числа слагаемых (см. стр. 97, табл. 2).

Выписанные числа представляют собою не что иное, как биномиальные коэффициенты. Мы видим, что при пяти слагаемых из 32 возможных случаев только 2 приходятся на погрешности $b \pm 2$ единицы и 20 случаев, когда погрешность равна $\pm{}^1/_2$, т. е. равна исходной. При десяти слагаемых всего 2 случая из 1024 дают наибольшую погрешность в 5 единиц и целых 252 случая соответствуют погрешности 0. На самом деле, если принять во внимание, что погрешности могут быть не только $\pm{}^1/_2$, но принимать все значения между $-{}^1/_2$ и $+{}^1/_2$, мы получим еще более значительные результаты. В теории вероятностей отношение числа возможных случаев, соответствующих рассматриваемому событию, к общему числу возможных случаев называется **вероятностью** данного события. Таким образом наша таблица дает нам вероятность $\frac{210+252+210}{1024} = \frac{674}{1024} \doteq \frac{2}{3}$ того, что при десяти слагаемых погрешность отразится всего на одной единице последнего десятичного знака. Многократные опыты показали, что при большом числе так называемых испытаний, т. е. опытных проверок, частость события, т. е. отношение действительно происшедших случаев к общему числу испытаний, почти точно совпадает с величиной вероятности. Таким образом только в виде чрезвычайно редкого исключения может случиться, что комбинация погрешностей даст особо неблагоприятное сочетание. В громадном большинстве случаев погрешности взаимно компенсируются, и даже при большом числе слагаемых можно ожидать, что погрешность последней цифры не превысит 1—2 единиц.

Таблица 2.

	-5	$-4\frac{1}{2}$	-4	$-3\frac{1}{2}$	-3	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5	
1										1		1										2
2									1		2		1									4
3								1		3		3		1								8
4							1		4		6		4		1							16
5						1		5		10		10		5		1						32
6					1		6		15		20		15		6		1					64
7				1		7		21		35		35		21		7		1				128
8			1		8		28		56		70		56		28		8		1			256
9		1		9		36		84		126		126		84		36		9		1		512
10	1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1	1024

Мы можем установить таким образом правило, которым можно пользоваться почти уверенно во всех случаях, не требующих особой осторожности, когда можно обойтись без вычисления предельных погрешностей.

При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков (т. е. цифр после запятой), **сколько их имеется в том из приближенных чисел, которое дано с наименьшим числом десятичных знаков.**

Пример 113.

$$\begin{aligned} \sqrt{1} &= 1 \\ \sqrt{2} &= 1{,}4142 \\ \sqrt{3} &= 1{,}732 \\ \sqrt{4} &= 2 \\ \sqrt{5} &= 2{,}236 \\ \hline \text{Сумма} &= 8{,}382 \end{aligned}$$

Здесь $\sqrt{1}$ и $\sqrt{4}$ точные числа; из приближенных чисел $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ даны с тремя десятичными знаками, $\sqrt{2}$ с четырьмя У суммы следует сохранить три десятичных знака.

Пример 114. Определить разность: $5{,}8321 - 4{,}24$

Пример 115. Вычислить: $2{,}871 - 0{,}48 + 0{,}5625 - 0{,}0342$

Пример 116. „ $18{,}428 + 4{,}5412 + 0{,}512 - 5{,}14 + 0{,}0032$

Пример 117. „ $125{,}7 + 14{,}89 - 41{,}15 + 0{,}189 - 2{,}421$

Пример 118. Взять из таблиц $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{11}$, $\sqrt[3]{12}$, $\sqrt[3]{13}$, $\sqrt[3]{14}$, $\sqrt[3]{15}$ сначала с двумя десятичными знаками, потом с четырьмя и вычислить в обоих случаях сумму. Определить предельную погрешность суммы и действительную погрешность.

§ 19. Умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня.

При действиях умножения и деления, для оценки точности результата обычно пользуются, как было выше выяснено, не абсолютными, а относительными погрешностями. По отношению к ним может быть сказано совершенно то же самое, что и по отношению к абсолютным. Относительные погрешности могут быть разных знаков и по своей абсолютной величине много меньше предельных погрешностей. Таким образом вероятность весьма велика, что относительная погрешность произведения много меньше своей предельной относительной погрешности.

Пример 119. Возьмем произведение:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{10}=120.$$

Значения корней возьмем из таблиц с двумя десятичными знаками. Получим:

$$1{,}41\cdot1{,}73\cdot2{,}24\cdot2{,}45\cdot2{,}83\cdot3{,}16=119{,}7172.$$

При перемножении мы нарочно взяли больше значащих цифр, чем это, собственно говоря, имело бы смысл; сделано это для того, чтобы при закруглении не накопить новых погрешностей. Полученное нами число имеет абсолютную погрешность $\Delta<0{,}3$ и следовательно относительную погрешность $\varepsilon<\frac{0{,}3}{120}=\frac{1}{400}$; между тем, подсчитывая предельные относительные погрешности, мы получим:

$$\delta=\frac{1}{2\cdot141}+\frac{1}{2\cdot173}+\frac{1}{2\cdot224}+\frac{1}{2\cdot245}+\frac{1}{2\cdot283}+\frac{1}{2\cdot316}.$$

При обычном грубом способе подсчета мы получили бы

$$\delta=\frac{1}{250}+\frac{1}{300}+\frac{1}{400}+\frac{1}{450}+\frac{1}{500}+\frac{1}{600}\doteq\frac{1}{60}.$$

При более аккуратном подсчете мы получим $\delta\doteq0{,}01406\doteq\frac{1}{71}$.

Таким образом, полученная нами относительная погрешность слишком в 5 раз меньше предельной относительной погрешности.

Предельная погрешность оказалась бы еще больше, если бы мы не знали самих чисел. В этом случае при трех точных значащих цифрах мы получили бы $\delta=\frac{1}{2\cdot10^2}=\frac{1}{200}$ для каждого сомножителя и следовательно для произведения $\delta_1=6\delta=\frac{6}{200}\doteq\frac{1}{33}$. Истинная погрешность оказывается в 12 раз меньше.

Поставим теперь вопрос о том, сколько значащих цифр можно взять в произведении, когда известно число значащих цифр сомножителей. Если сомножители неизвестны, то наибольшая предельная погрешность каждого из них, имеющего m значащих цифр, равна

$$\frac{1}{2\cdot10^{m-1}}$$

и для двух сомножителей $2\delta=\frac{1}{10^{m-1}}$; если у произведения взять также m значащих цифр, то в случае, если бы первая цифра произведения оказалась 9, мы имели бы абсолютную погрешность до 10 единиц последнего знака, так как

$$\delta_1 = \frac{10}{9 \cdot 10^{m-1}} \doteq \frac{1}{10^{m-1}}.$$

Таким образом, при перемножении двух чисел, данных с m значащими цифрами, мы должны, собственно говоря, взять у произведения всего $m-1$ цифр. Точное исследование[1] показывает, что столь большая погрешность немыслима, но возможна все же погрешность немного больше 5 единиц последнего десятичного знака. Таким образом все же приходится сказать, что, имея два сомножителя с точными значащими цифрами, можно в произведении ручаться лишь за $m-1$ значащих цифр; отсюда можно было бы заключить, что при перемножении k сомножителей можно ручаться только за $m-k+1$ значащих цифр. Таким образом при пяти сомножителях, из которых каждый взят с тремя точными значащими цифрами, мы не могли бы ручаться даже за одну единственную цифру.

На самом деле можно доказать, что если худший случай даже имеет место для двух сомножителей, то он уже не может иметь место для трех, а кроме того этот худший случай сам по себе может встретиться лишь в виде редкого исключения.

По большей части при умножении можно в произведении получить столько же точных значащих цифр, сколько их имеется у того из сомножителей, который имеет их меньше всего. Однако это правило не всегда выполняется, и нетрудно видеть, что более неблагоприятными являются те случаи, когда в произведении первая цифра большая, т. е. 7, 8 или 9, чем когда первая цифра 1, 2 или 3. Одна и та же относительная погрешность при одном и том же числе значащих цифр даст в первом случае бо́льшую абсолютную погрешность, чем во втором. Особенно неблагоприятным случаем является тот, когда один или несколько сомножителей, данных с наименьшим числом значащих цифр, имеют первой цифрой 1, 2 или 3, в то время как произведение имеет первой цифрой 7, 8 или 9. Сомножитель с малой первой цифрой даст бо́льшую относительную погрешность, которая в свою очередь вызовет бо́льшую абсолютную погрешность произведения.

Пример 120. $\sqrt{0{,}99} \cdot 1{,}02^2 \doteq 0{,}99499 \cdot 1{,}0404.$

Если бы мы взяли оба сомножителя с двумя значащими цифрами, мы имели бы: $0{,}99 \cdot 1{,}0 = 0{,}99$.

---

[1] Брадис, Арифметика приближенных вычислений, § 45.

Между тем $0{,}99499 \cdot 1{,}0404 \doteq 1{,}0352$.

Таким образом, взяв произведение 0,99 с двумя значащими цифрами, мы получили во второй из них погрешность более 4 единиц.

Случай почти самый неблагоприятный.

Но стоило бы нам взять для $1{,}02^2 = 1{,}04$, т. е. одной значащей, цифрой больше, и в произведении мы получили бы $0{,}99 \cdot 1{,}04 = 1{,}03$ т. е. не только первые две цифры правильно, но и в третьей погрешность менее единицы.

Пример 121. $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{24} \doteq 4{,}3267 \cdot 2{,}8847$.

Взяв по две цифры, получим $4{,}3 \cdot 2{,}9 = 12{,}47$, в то время как с пятью цифрами $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{24} = 6\sqrt[3]{9} = 6 \cdot 2{,}0801 = 12{,}4806$.

Таким образом мы не только первые две цифры получили точно, но даже в четвертой цифре погрешность всего на одну единицу.

Случай особо благоприятный вследствие того, что, во-первых, погрешности сомножителей имели разные знаки, и во-вторых, первая цифра произведения равна единице.

Само собою разумеется, что сказанное про умножение относится и к делению, так как и там относительные погрешности складываются или вычитаются смотря по их знаку.

При делении однакоже более благоприятным случаем является тот, когда погрешность делимого и делителя одинаковых знаков.

Пример 122. $\sqrt{1{,}10} : \sqrt{1{,}33} \doteq 1{,}04881 : 1{,}15326 \doteq 0{,}90944$.

Если от данных чисел взять всего по две значащих цифры, получим $1{,}0 : 1{,}2 \doteq 0{,}833$.

Мы имеем случай исключительно неблагоприятный. Погрешность составляет слишком 7 единиц второй значащей цифры, вследствие того, что первые цифры делимого и делителя единицы, а первая цифра частного 9 и кроме того погрешности имеют разные знаки.

Пример 123. $\sqrt{98} : \sqrt{72} = 7\sqrt{2} : 6\sqrt{2} = \frac{7}{6} \doteq 1{,}1667$

$$\sqrt{98} \doteq 9{,}8995, \quad \sqrt{72} \doteq 8{,}4853$$

При двух значащих цифрах, получим:

$$9{,}9 : 8{,}5 \doteq 1{,}1647.$$

Случай особо благоприятный, и при двух точных значащих цифрах мы получим в частном всего 2 единицы погрешности в 4-й значащей цифре.

Из всего изложенного, а также из приведенных примеров можно вывести следующее общее правило:

при умножении и делении можно с большой степенью вероятности считать, что произведение или частное имеют столько же точных значащих цифр, сколько их имеет то из данных чисел, у которого их наименьшее число. Если первая слева цифра результата по крайней мере вдвое больше первой цифры того из данных чисел, которое имеет наименьшее число значащих цифр, то следует в полученном числе взять одной значащей цифрой меньше.

Если допускать сомнительность последней цифры и не принимать во внимание исключительно неблагоприятного стечения обстоятельств, то можно в произведении и частном сохранить столько значащих цифр, сколько их имеет то из данных приближенных чисел, которое имеет их меньше всего.

Действие возведения в степень ничем не отличается от умножения, и здесь правило получится то же самое. Неблагоприятным случаем будет тот, когда возвышаемое в степень число имеет малую первую цифру, а полученное после возведения в степень наоборот большую. Положение ухудшается тем, что, рассматривая возвышение в степень как умножение, мы видим, что погрешности сомножителей будут иметь все один и тот же знак и потому складываться.

Пример 124. $3{,}1448^2 \doteq 9{,}8898.$

Взяв с тремя значащими цифрами, получим

$$3{,}14^2 \doteq 9{,}8596\cdot$$

закругляя до трех значащих цифр получим 9,86, т. е. погрешность в 3 единицы последнего знака.

Пример выбран неблагоприятный.

Пример 125. Если взять случай, когда при возведении в степень получим число, имеющее первой цифрой единицу или двойку, результат окажется значительно более благоприятным:

$$4{,}1231^2 \doteq 17{,}0000.$$

При трех цифрах имеем:

$4{,}12^2 = 16{,}9744$, т. е. погрешность в три единицы четвертой значащей цифры. Закругляя до трех значащих цифр, получим точно $4{,}12^2 = 17{,}0$.

Конечно, много зависит еще и от размера погрешности.

При извлечении корня дело обстоит более благоприятно; как известно, относительная погрешность корня меньше погрешности данного числа. Кроме того первая цифра квадратного корня может быть лишь немногим больше, чем первая цифра подкоренного количества.

Рассмотрим пример наиболее неблагоприятного случая.

Пример 126. $\sqrt{10,24} = 3,2000.$

Извлечем корень, взяв всего три значащих цифры

$$\sqrt{10,2} \doteqdot 3,1904$$

и, следовательно, с точностью до трех значащих цифр

$$\sqrt{0,2} \doteqdot 3,19.$$

Погрешность равна единице третьей значащей цифры. Взятый пример особенно неблагоприятный. Обычно можно получить не меньше, а часто и больше точных значащих цифр корня, чем их было у подкоренного количества.

Пример 127. $\sqrt{8,4681} \doteqdot 2,9100;$

то же с 3 цифрами $\sqrt{8,47} \doteqdot 2,9103,$

Корень получился с четырьмя точными значащими цифрами и лишь в пятой погрешность равна трем единицам.

Таким образом мы получаем следующее правило:

обычно при возведении в квадрат или куб полученное число имеет столько же точных значащих цифр, как и возводимое в степень, кроме тех случаев, когда первая цифра степени по крайней мере вдвое больше, чем первая цифра числа, возводимого в степень; в атом случае степень может иметь на единицу меньше точных значащих цифр.

При извлечении корня можно с большой степенью уверенности всегда брать у корня столько же значащих цифр, сколько их дано у приближенного подкоренного числа.

Определить, в ниже напечатанных примерах, сколько значащих цифр можно взять у результатов действий.

Пример 128. $2,871 \cdot 625.$

Пример 129. $2,15 \cdot 9,81 \cdot 3,1416.$

Пример 130. $4,15\sqrt{8,71}.$

Пример 131. $\dfrac{4,2504}{\sqrt{51,32}}.$

Пример 132. $\sqrt{8,56} \cdot 13,681.$

Пример 133. $1,956^3.$

Пример 134. $27,5^2 \cdot 14,75.$

Пример 135. $1,583 \cdot 6,75994.$

Когда приходится производить большое число действий умножения, деления, возвышения в степень и извлечения корня, надо, как и при сложении, принять во внимание компенсацию погрешностей, которые имеют разные знаки. В этом случае, даже если и встретятся наиболее неблагоприятные условия, можно с большой степенью вероятности ожидать, что одно из следующих действий, может быть также с неблагоприятными условиями, даст погрешность противоположного знака и компенсирует первую погрешность.

Само собою разумеется что правила, изложенные в настоящей главе, служат лишь для грубой оценки точности результата и ни в каком случае не заменяют правил, изложенных в предыдущих главах. Главное — надо помнить, что сама оценка в этих случаях не обладает достоверностью.

Предлагаем решить ряд примеров на вычисление сложных формул без учета погрешностей, пользуясь только правилами подсчета цифр, причем очень поучительно проделать те же примеры с учетом погрешностей и таким образом сравнить результаты.

Пример 136. Определить момент инерции I прямоугольного сечения по формуле $I=\frac{bh^3}{12}$, где $b=6,28$ ($^1/_2$); $h=3,19$ ($^1/_2$).

Пример 137. Определить дагление на цилиндрическую винтовую пружину круглого сечения по формуле

$$Q=0,196\,\frac{d^3R}{r},$$

где $d=7,2$ *мм* — диаметр проволоки, $r=18,5$ *мм* — радиус витка, $R=80$ *кг* — допускаемое напряжение.

Пример 138. Средняя скорость V истечения воды из прямоугольного отверстия равна:

$$V=\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,\frac{h_2^{3/2}-h_1^{3/2}}{h_2-h_1},$$

где $g=981$ *см/сек*^{2} — ускорение силы тяжести; h_1 и h_2 — расстояние верхнего и нижнего края отверстия от поверхности воды. Дано $h_1=8,3$ *см*; $h_2=12,9$ *см.*

Пример 139. Вычислить $y=15,7x^3+13,9x-27,6$ при $x=0,89$ ($^1/_2$).

Выводы.

1. При сложении и вычитании неточных чисел можно с большой степенью вероятности считать у суммы или разности точным такое число цифр после запятой, какое имеет то из данных чисел, у которого их меньше всего. В случае сложения большего числа слагаемых (более 5), в особенности когда они все имеют одинаковое число данных цифр после запятой, следует из осторожности у суммы брать одной цифрой меньше.

2. При умножении и делении можно с большой степенью вероятности считать, что произведение или частное имеют столько же точных значащих цифр, сколько их имеет то из данных чисел, у которого их меньше всего. Если первая слева цифра результата по крайней мере вдвое превышает первую цифру того из данных чисел, которое имеет наименьшее число точных значащих цифр, то следует из осторожности в полученном числе взять одной значащей цифрой меньше.

3. То же правило (2) можно применять при возведении в квадрат или куб.

4. При извлечении квадратного корня можно всегда с весьма большой степенью вероятности считать, что полученное число имеет не меньше точных значащих цифр, чем подкоренное.

Вопросы.

1. Почему предельная абсолютная погрешность суммы или разности почти всегда значительно больше действительной погрешности? Почему того же нельзя сказать об относительной погрешности разности?

2. Чем объясняется, что при большом числе слагаемых действительная абсолютная погрешность суммы обычно больше отличается от предельной погрешности, чем при малом числе слагаемых?

3. Какой смысл имеют правила, в которых высказываются положения не достоверные, а только весьма вероятные? В каких случаях можно пользоваться такими правилами?

4. Почему при извлечении корня можно всегда полагать, что число точных значащих цифр корня не меньше числа точных значащих цифр подкоренного числа, а при возведении в степень такой же уверенности нет?

5. Взять таблицу приближенных чисел, напр. корней квадратных, данных с 4 десятичными знаками, и попробовать найти пять таких чисел, взятых с 2 десятичными знаками, чтобы погрешность всех их была больше 0,4 единицы последнего знака. Убедиться, что такие пять чисел нелегко найти. Попробовать взять в любом месте

таблицы четыре числа подряд и определить сумму действительных погрешностей, принимая все числа с двумя десятичными знаками.

6. Какой смысл имеют выведенные в предыдущих главах правила определения предельных погрешностей, когда действительные погрешности почти никогда не достигают предельных и правила подсчета числа десятичных знаков или значащих цифр значительно проще всех ранее выведенных правил?

7. Попробовать подобрать два таких приближенных числа (с заданными погрешностями), чтобы их произведение имело больше точных значащих цифр, чем данные сомножители; два других, чтобы произведение имело меньше точных значащих цифр, чем оба сомножителя; и, наконец, два таких, чтобы произведение имело столько же значащих цифр, как оба сомножителя. У обоих сомножителей взято одинаковое число значащих цифр. Какой из трех случаев встречается чаще?

Глава VI.

Таблицы.

§ 20. Описание устройства таблиц для простейших вычислений.

Значительное облегчение при различного рода вычислениях может быть достигнуто при пользовании таблицами. Рассмотрим сначала таблицы, служащие для простейших арифметических вычислений, и в первую очередь таблицы, в которых как аргументы, так и функции даны точно. Такого рода таблиц существует сравнительно немного. В первую очередь это таблицы умножения, квадратов и кубов.

Таблицы умножения изданы в различных видах.

Большой популярностью пользуются таблицы Crelle Bremiker'a для произведения всех чисел до 1000 на множителей тоже до 1000.

Наиболее распространенными у нас в настоящее время являются таблицы О'Рурка, сравнительно малого формата и удобные для пользования. На каждой страничке находятся две таблицы, дающие произведения трехзначного числа, написанного над таблицей, на двузначное, десятки которого находятся в верхней строке, а единицы в крайних столбцах справа или слева. На пересечении соответствующих строк и столбца находим искомое произведение.

Если требуется помножить трехзначное на трех- или четырехзначное, то приходится найти два произведения и затем сложить их.

Приводим здесь в качестве примера одну табличку (табл. 3) для числа 419 и покажем, как при помощи ее найти произведение $4{,}19 \times 27{,}48$.

Таблица 3.

419

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	
0	000	4190	8380	12570	16760	20950	25140	29330	33520	37710	0
1	419	4609	8799	12909	17179	21369	25559	29749	33939	38129	1
2	838	5028	9218	13408	17598	21788	25978	30168	34358	38548	2
3	1257	5447	9637	13827	18017	22207	26397	30587	34777	38967	3
4	1676	5866	10056	14246	18436	22626	26816	31006	35196	39386	4
5	2095	6285	10475	14665	18855	23045	27235	31425	35615	39805	5
6	2514	6704	10894	15084	19274	23164	27654	31844	36034	40224	6
7	2933	7123	11313	15503	19693	23883	28073	32263	36453	40643	7
8	3352	7542	11732	15922	20112	24302	28492	32682	36872	41062	8
9	3771	7961	12151	16341	20531	24721	28911	33101	37291	41481	9

На пересечении столбца, соответствующего числу 20, и строки 7 находим 11313 и на пересечении столбца 40 и строки 8 находим 20112; складываем:

$$\begin{array}{r} 11313 \\ 20112 \\ \hline 1151412 \end{array}$$

Окончательно: $4{,}19 \times 27{,}48 = 115{,}1412$.

Само собою разумеется, что если не требуется такой точности, или если данные числа были приближенными, то придется отбросить лишние знаки.

Если требуется помножить четырехзначное на четырехзначное, то приходится составить четыре частных произведения. Пусть например требуется найти $4{,}196 \times 27{,}48$. Находим, как и раньше:

$$4{,}19 \times 27 = 113{,}13$$
$$4{,}19 \times 0{,}48 = 2{,}0112$$

Смотрим, далее, в табличку для множимого 274 и находим по ней

$$27{,}4 \times 0{,}006 = 0{,}1644$$

и наконец

$$0{,}006 \times 0{,}08 = 0{,}00048;$$

окончательно:

$$\begin{array}{r} 113{,}13 \\ 2{,}0012 \\ 1644 \\ 48 \\ \hline 115{,}30608 \end{array}$$

Если оба сомножителя были приближенными, то в произведении мы возьмем лишь 4 значащих цифры, т. е. 115,3, и ясно, что последнее произведение 0,00048 было совершенно не нужно выписывать.

По тем же таблицам можно производить деление. Так напр., если требуется разделить 35,842 : 4,19, то в приведенной нами табличке ищем ближайшее к данному делителю число, меньше его. Находим 35615, что дает первые две цифры частного 8,5, так как число это стоит на пересечении столбца 80 и строчки 5. Делаем вычитание:

$$35{,}842 - 35{,}615 = 0{,}227.$$

Ищем по той же таблице число, первые цифры которого ближе всего подходят к 227. Находим 22626 на пересечении столбца 50 и строки 4; следовательно две следующие цифры будут 54. Окончательно:

$$35{,}842 : 4{,}19 \doteqdot 8{,}554.$$

Если делимое и делитель числа точные, то можно продолжать деление и дальше. Если они приближенные, то очевидно нами уже получена одна лишняя недостоверная цифра и надо было взять частное 8,55.

Положение запятой как при умножении, так и при делении определяется по изложенным выше в задании III правилам, или просто путем грубого закругления чисел, что обычно проще всего.

Если делитель число, имеющее четыре значащих цифры, то деление несколько сложнее. Пусть требуется разделить

$$35{,}842 : 4{,}196.$$

Отбросив сначала цифру 6 делителя, находим первые две цифры частного 8,5; имеем следовательно:

$$8{,}5 \cdot 4{,}19 = 35{,}615.$$

Находим по другой табличке

$$8{,}5 \cdot 0{,}006 = 0{,}051,$$

откуда

$$8{,}5 \cdot 4{,}196 = 35{,}615 + 0{,}051 = 35{,}666;$$

вычитая из данного делимого, получим остаток:

$$35{,}842 - 35{,}666 = 0{,}176.$$

По той же таблице ближайшее число, первые три цифры которого 176, на пересечении столба 40 и строки 2 равно 17598. Таким образом, принимая 42 за следующие две цифры частного, мы получаем:

$$35{,}842 : 4{,}196 \doteqdot 8{,}542.$$

Последние две цифры мы получили, не принимая во внимание цифры 6 делителя. Если является сомнение в том, как отразилась бы эта цифра, надо заглянуть в следующую табличку с числом 420, которое, собственно говоря, ближе к 4,196, чем 419; но, как и следовало ожидать, и там ближайшее число к 176 будет в том же столбце и той же строке, только оно будет немного больше, а именно 17640.

Кроме таблиц умножения, издаются еще и таблицы деления, которыми иногда удобнее пользоваться, чем таблицами умножения. Таковы напр. таблицы Нейшулера для деления многозначных чисел, в которых даны частные от деления 1, 2, 3,... 9 с семью нулями на все четырехзначные числа. По этим таблицам можно легко найти частное от деления семизначного числа на четырехзначное. При делении на пятизначное приходится пользоваться дополнительной таблицей. Таблицы удобны для вычисления процентов.

Весьма интересно составлены таблицы того же автора под названием „универсальные таблицы приближенных вычислений", служащие для приближенного умножения и деления.[1]

Надо заметить, что быстрота пользования таблицами зависит в значительной мере от привычки и часто можно быстрее вычислить по менее удобным таблицам, если только уже составилась привычка пользоваться ими. Для приближенных вычислений с тремя значащими цифрами удобнее всего пользоваться логарифмической линейкой, описание которой дано в следующей главе.

В 1690 году Ludolff впервые указал на возможность составления другого вида таблиц умножения. В самом деле, из очевидной формулы:

$$xy = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}$$

следует, что если иметь в своем распоряжении таблицу квадратов чисел, то можно находить произведения, найдя только полусумму и полуразность сомножителей, и, отыскав их квадраты, вычесть найденные числа. Еще удобнее, если в таблицах даны квадраты чисел, деленные на 4. Лучшими таблицами такого рода сейчас являются таблицы Blater'a, в которых даны четверти квадратов чисел до 200 000. Нетрудно видеть, что такого рода таблицы занимают много меньше места, чем таблицы умножения. В самом деле, в обыкновенной таблице умножения всех чисел от 1 до 100 должно быть очевидно $100^2 = 10\,000$ произведений; между тем

[1] Довольно удобные таблицы умножения Циммермана (Л. Подтягина) четырехзначных чисел на двузначные, сравнительно малого размера с приложением таблиц квадратов Ф. Иорга, дающих квадраты всех четырехзначных чисел всего на двух страницах, вышли в 1932 г.

по таблицам четвертей квадратов можно найти произведения всех чисел до 100, если даны четверти квадратов всех чисел до 200; и кроме того эти последние таблицы дают возможность найти произведения чисел и более 100, но на множители меньше 100, так чтобы $x+y \leqq 200$.

Этим объясняется, что, в то время как наибольшие таблицы Bremiker'a дают произведения только для трехзначных сомножителей, таблицы Blater'a дают возможность находить произведения для пятизначных сомножителей, будучи меньшими по размеру.

Четверть квадратов нечетных чисел, очевидно, числа дробные; однакоже, если представлять их в виде смешанных дробей, то дробная часть их всегда равна $^1/_4$; в самом деле, представив нечетное число в виде $2n+1$, получим:

$$\frac{(2n+1)^2}{4}=\frac{4n^2+4n+1}{4}=n^2+n+\frac{1}{4}.$$

Печатание таблиц, содержащих смешанные дроби, было бы сложно, а потому в таблицах дробь $^1/_4$ просто отбрасывают, тем более, что при получении произведения все равно приходится производить вычитание двух чисел, имеющих дроби $^1/_4$, и эти дроби исчезают. Например:

$$x=483;\ y=256;$$

$$x+y=739;\ x-y=227;$$

$$\frac{(x+y)^2}{4}=136\,530^1/_4;\quad \frac{(x-y)^2}{4}=12\,882^1/_4$$

$$xy=136\,530^1/_4-12\,882^1/_4=123\,648.$$

Для нахождения произведения двух чисел по таким таблицам приходится, следовательно, произвести одно сложение и два вычитания и два раза отыскать число в таблице. Однако благодаря тому, что такие таблицы дают возможность нахождения произведений больших чисел, чем обычные таблицы умножения, во многих случаях они являются более удобными.

Кроме описанного выше использования таблиц квадратов, во всех технических справочниках имеются таблицы квадратов, кубов, а иногда и пятых степеней чисел. Чаще всего таблицы эти даны точно для чисел от 1 до 1000. Однако кубы чисел близких к 1000 содержат девять значащих цифр и бывают нужны лишь в виде редкого исключения. Более целесообразны поэтому для практических целей приближенные таблицы. Так например в известных немецких пятизначных таблицах Gauss'a даны квадраты всех чисел от 0,000 до 10,000 через одну тысячную, с четырьмя знаками после запятой. Таким образом квадраты чисел с четырьмя значащими цифрами даны с шестью, а не с восьмью цифрами, как было бы в точных таблицах. По тем же таблицам путем интерполирования (о чем будет сказано ниже) можно получать и квадраты чисел с пятью значащими цифрами.

Само собой разумеется, что такое отбрасывание лишних значащих цифр особенно существенно в таблицах кубов и совершенно неизбежно в таблицах пятых степеней.

Громадное большинство таблиц вообще не может быть дано точно. Таковы напр. все таблицы корней квадратных, кубических, таблицы длин окружностей или площадей кругов при данном диаметре, таблицы обратных чисел, т. е. единицы, деленной на данное число, таблицы тригонометрических величин, таблицы логарифмов и множество других широко распространенных величин. Такого рода таблицы составляются с различным числом значащих цифр, смотря по потребности. Наименьшее число значащих цифр в таблицах при самых грубых подсчетах равно трем, что дает точность меньшую, чем при пользовании хорошей логарифмической линейкой. Для громадного большинства технических расчетов достаточно пользоваться таблицами с четырьмя значащими цифрами. Часто однако предпочитают пользование пятизначными таблицами из тех соображений, что, после ряда действий над такими числами, пятая значащая цифра может оказаться недостоверной, и тогда, отбросив ее, мы можем ручаться за четыре цифры.

Расположение таблиц бывает разное. Обычно различают таблицы с одним, двумя или большим числом в х о д о в. Таблица с одним входом представляет из себя два столбца чисел, из которых левый является аргументом, а правый функцией.

Таблица 4.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
100	10 000	1 000 000	10,0000	4,6416	2,00000	10,0000	314,16	7853,98	100
101	10 201	1 030 301	10,0499	4,6570	2,00432	9,90099	317,30	8011,85	101
102	10 404	1 061 208	10,0995	4,6723	2,00860	9,80392	320,44	8171,28	102
103	10 609	1 092 727	10,1489	4,6875	2,01284	9,70874	323,58	8332,29	103
104	10 816	1 124 864	10,1980	4,7027	2,01703	9,61538	326,73	8494,87	104
105	11 025	1 157 625	10,2470	4,7177	2,02119	9,52381	329,87	8659,01	105

Для экономии места такие таблицы обычно содержат при одном и том же аргументе n не одну, а целый ряд функций. Таковы напр. обычные таблицы в технических справочниках и календарях, в которых после столбца чисел n идут значения n^2, n^3, $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$, $\log n$, $1000\frac{1}{n}$, πn, $\frac{\pi n^2}{4}$, после чего справа снова идет столбец чисел n, (табл.4).

Такие таблицы однако по большей части являются неудобными по целому ряду соображений. На одной странице обычно бывает не более 50—80 строк, и следовательно, когда нужно находить значения функции при различных значениях аргументов, приходится перелистывать много страниц. Кроме того, при 8 столбцах цифр очень легко по ошибке заглянуть не в тот столбец, в который нужно. По всем этим соображенмям таблицы обычно составляются с двумя входами, как напр. приведенная нами выше страничка из таблиц умножения О'Рурка. Таблицы располагаются так, что строка соответствует первым цифрам аргумента, а столбец—последней цифре. На пересечении строки и столбца находится соответствующее значение функции. Так напр. в четырехзначных таблицах Брадиса, вообще хорошо составленных, находим табличку корней квадратных, начало которых показано на табл. 5.

Квадратные корни. *Таблица 5.*

дес. \ ед.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,00000	1,00000	1,41421	1,73206	2,00000	2,23607	2,44949	2,64575	2,82843	3,00000
1	3,16228	3,31662	3,46410	3,60555	3,74166	3,87298	4,00000	4,12311	4,24264	4,35890
2	4,47214	4,58258	4,69042	4,79583	4,89898	5,00000	5,09902	5,19615	5,29150	5,38516

Например: $\sqrt{23}$ находится на пересечении строки для 2 десятков и столбца для 3 единиц: $\sqrt{23} \doteq 4{,}79583$. Такая таблица для изменения аргумента от 1 до 99 занимает всего десять строк, и на двух страницах при 50 строчках на каждой можно поместить корни всех чисел до 1000. Таким же образом составляются и все остальные таблицы.

Еще более компактными являются таблицы с тремя входами, если только пользование ими достаточно удобно. Так например в тех же таблицах Брадиса составлены приближенные таблицы квадратов чисел. Приводим три первых строки этой таблицы (табл. 6).

Квадраты чисел. *Таблица 6.*

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188	2	4	6	8	10	13	15	17	19
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416	2	5	7	9	11	14	16	18	1
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664	2	5	7	10	12	15	17	20	22

В этой таблице мы берем, как и в предыдущей, первые две цифры в левом столбце, третью цифру в верхней строке и на пересечении соответствующей строки и столбца находим искомое число. Но если данный нам аргумент имеет три знака после запятой, то во второй табличке справа, в той же строке и в столбце, соответствующем этой четвертой значащей цифре, находим поправку, которую нужно прибавить к последним цифрам раньше найденного числа. Так напр. квадрат числа 1,157 найдем, взяв из строки 1,1 и столбца 5 число 1,323 и прибавив к нему из столбца 7 правой таблицы на той же строке еще 16, т. е.

$$1{,}157^2 \doteq 1{,}323 + 0{,}016 = 1{,}339.$$

Однако такой способ составления таблицы далеко не гарантирует от погрешности, превышающей половину единицы последнего знака. Дело в том, что поправка, соответствующая одной и той же четвертой цифре, напр. 5, на самом деле не одинакова, будет ли третья цифра равна нулю или девяти. Так напр., если взять $3{,}005^2 = 9{,}030025$ и $3{,}095^2 = 9{,}579025$; между тем по таблицам Брадиса находим:

$$3{,}005^2 \doteq 9{,}000 + 0{,}030 = 9\,030$$
$$3{,}095^2 \doteq 9{,}548 + 0{,}030 = 9{,}578.$$

Таким образом квадрат второго числа получен нами с погрешностью в единицу последней цифры. Это обстоятельство приходится учитывать при пользовании такой таблицей. Зато таблица занимает очень мало места, и на двух страницах помещаются квадраты всех чисел от 1,000 до 9,9999; для всех чисел с тремя значащими цифрами мы получаем результат, погрешность которого не превышает $^1/_2$ единицы четвертой значащей цифры; для чисел с четырьмя цифрами погрешность иногда немного превышает единицу последней значащей цифры.

Напомним еще совершенно очевидное правило, что перенесение запятой в данном числе на одно место вызывает у квадрата этого числа перенесение запятой на два места, у куба — на три. Цифры остаются те же:

$$12{,}9^2 = 166{,}41;\quad 1{,}29^2 = 1{,}6641;\quad 129^2 = 16\,641;$$
$$12{,}9^3 = 2146{,}689;\quad 1{,}29^3 = 2{,}146689;\quad 129^3 = 2\,146\,689.$$

При извлечении корня дело обстоит иначе. Если у данного числа перенести запятую на 2 места, то у квадратного корня из него запятая передвинется на о д н о место. Но если запятую перенести на одно место, то корень получится совершенно иной:

$$\sqrt{129} = 11{,}3578;\quad \sqrt{12{,}9} = 3{,}5917;$$
$$\sqrt{1{,}29} = 1{,}1358;\quad \sqrt{0{,}129} = 0{,}3592.$$

Таким образом при пользовании обычными техническими таблицами корней, данными для чисел от 1 до 1000, можно найти $\sqrt{129}$, $\sqrt{1{,}29}$, $\sqrt{0{,}0129}$, но нельзя найти $\sqrt{12{,}9}$ $\sqrt{0{,}129}$ и т. д. Эти корни можно найти помощью обратного разыскания числа по данному его квадрату. Так напр., найдя, что число 128 881 является квадратом числа 359, мы имеем $\sqrt{12,8881} = 3,59$. В данном случае мы случайно получили очень удачно. Закругляя подкоренное количество, мы можем написать $\sqrt{12,9} \doteq 3,59$; но у корня получены только три значащих цифры. Во избежание таких затруднений, иногда, как это сделано в таблицах, приложенных к курсу приближенных вычислений Я. Безиковича, против одного аргумента находится два различных числа для его корня.

Выписываем четыре строки из его таблиц для квадратных корней (табл. 7):

Таблица 7.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	2345	2347	2349	2352	2354	2356	2358	2360	2362	2364	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7416	7423	7430	7436	7443	7450	7457	7463	7470	7477	1	1	2	3	2	4	5	5	6
56	2366	2369	2371	2373	2375	2377	2379	2381	2383	2385	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7483	7490	7497	7503	7510	7517	7523	7530	7537	7543	1	1	2	3	3	4	5	5	6

Для нахождения $\sqrt{55,83}$ мы берем из двух строк, соответствующих числу 55, нижнюю, так как мы знаем, что первая цифра корня должна быть 7. Для столбца 8 и поправки 3 получим $\sqrt{55,83} \doteq 7,472$; для $\sqrt{5,583}$ возьмем соответствующие цифры из верхней строчки, а именно:

$$\sqrt{5,583} \doteq 2,363.$$

Очевидно:

$$\sqrt{0,5583} \doteq 0,7472; \quad \sqrt{5583} \doteq 74,72;$$

$$\sqrt{0,05583} \doteq 0,2363; \quad \sqrt{558,3} \doteq 23,63.$$

Для таблиц кубов пришлось бы против каждого аргумента писать уже три строчки, так как только при перенесении запятой на три места, у корня будут те же цифры, но запятая передвинется на одно место; в случае же передвижения запятой на одно или два места цифры корня получатся совершенно другие. Издание таких таблиц несомненно было бы целесообразно.

Таблиц, служащих для всякого рода вычислений, существует множество. Кроме всем известных таблиц, о которых здесь было упомянуто, в любом справочнике можно найти самые разнообразные таблицы, служащие для таких вычислений, которые приходится часто производить. О таблицах логарифмов будет подробнее сказано в следующем задании.

Почти все выше рассмотренные таблицы являлись таблицами функций, зависящих от одного аргумента, кроме таблиц умножения, где очевидно произведение зависит от двух сомножителей. Приведем еще один пример таблицы функций, зависящих от двух аргументов, для случая неточных чисел. Возьмем таблицы объемов, занимаемых 1 *кг* воздуха средней влажности, при данном давлении p в миллиметрах ртутного столба и температуре t в градусах Цельсия (табл. 8).

Таблица очевидно имеет два входа, по одному для каждого из аргументов. Чтобы узнать удельный объем воздуха при 750 *мм* и 15°, надо отыскать число, стоящее на пересечении соответствующей строки и столбца. Получаем $\gamma = 0{,}830$ *м*³. Нетрудно видеть, что такие таблицы должны занимать много места вследствие того, что для каждого из аргументов имеется лишь один вход.

Иногда так строятся таблицы умножения (напр. известные немецкие таблицы Zimmermann'a), где для одного множителя служит один вход, а для другого второй.

Таблицы функций для трех и более аргументов редко составляются, так как они должны занимать еще больше места. Каждая таблица для функции трех аргументов должна состоять из ряда

Таблица 8.

$p_{мм}$	$t =$									
	−10°	−5°	0°	+5°	+10°	+15°	+20°	+25°	+30°	+35°
800	0,711	0,724	0,738	0,751	0,765	0,778	0,792	0,805	0,819	0,832
790	0,720	0,733	0,747	0,761	0,774	0,788	0,802	0,815	0,829	0,843
780	0,729	0,743	0,757	0,770	0,784	0,798	0,812	0,826	0,840	0,854
770	0,738	0,752	0,766	0,781	0,795	0,809	0,823	0,837	0,851	0,865
760	0,748	0,762	0,777	0,791	0,805	0,819	0,833	0,848	0,862	0,876
750	0,758	0,773	0,787	0,801	0,816	0,830	0,845	0,859	0,873	0,888
740	0,768	0,783	0,798	0,812	0,827	0,841	0,856	0,871	0,885	0,900
730	0,779	0,794	0,808	0,823	0,838	0,853	0,868	0,883	0,897	0,912
720	0,790	0,805	0,820	0,835	0,850	0,865	0,880	0,895	0,910	0,925
710	0,801	0,816	0,831	0,847	0,862	0,877	0,892	0,907	0,923	0,938

отдельных таблиц, каждая из которых соответствует одному частному значению одного аргумента и имеет два входа для двух других аргументов. К такому типу таблиц можно напр. причислить таблицы О'Рурка, где каждая табличка соответствует одному частному значению одного из сомножителей, а два ее входа служат для частных значений десятков и единиц другого сомножителя.

В настоящее время для таблиц функций трех и более аргументов широко пользуются графическим методом, так называемыми **номограммами**.

Пример 140. Пользуясь имеющимися таблицами, составить себе таблицы квадратов, кубов, корней квадратных и корней кубических с двумя значащими цифрами. Каждую таблицу составить отдельно с двумя входами, причем для квадратных корней против каждого числа аргумента проставить два числа, а для кубических три.

Составление таких таблиц полезно не только как упражнение, но и для пользования ими при быстром вычислении с малой точностью, когда требуется только прикинуть результат. При отбрасывании лишних знаков надо помнить правило о том, что, если отбрасывается больше $^1/_2$ последнего из оставляемых знаков, то следует этот последний знак увеличить на единицу; если отбрасывается ровно $^1/_2$ последнего из оставляемых знаков, т. е. 50, то принято (хотя это совершенно условно) закруглять оставляемую цифру до четной, т. е. прибавлять единицу, если она нечетная, и не прибавлять, когда она четная.

Пример 141. Пользуясь таблицами квадратов чисел до 100, составить табличку четвертей квадратов всех чисел до 200 с двумя входами. Поупражняться в пользовании такой таблицей для умножения и деления.

Пример 142. Составить таблицу функции двух аргументов $v=\pi r^2 h$ для $r=1, 2\ldots 10$; и $h=1, 2\ldots 10$: с одним десятичным знаком

§ 21. Интерполирование по таблицам.

Очень часто без труда можно найти значение функции для аргумента, не данного в таблице, когда этот аргумент находится между двумя, данными в таблице. Так напр., если в таблице даны $\sqrt{387} \doteq 19{,}67$ и $\sqrt{388} \doteq 19{,}70$, то для $\sqrt{387{,}3}$ можно очевидно предполагать правильным значение 19,68, так как при увеличении аргумента на единицу значение функции возрастает на три единицы последнего знака. Следовательно при возрастании аргумента на 0,1 функция возрастает на 0,3 единицы последнего знака, и наконец для приращения аргумента, равного 0,3, функция получит приращение, равное 0,9 единицы четвертого знака.

Такого рода рассуждение основано на предположении, что функция возрастает пропорционально возрастанию аргумента, между тем как, вообще говоря, это предположение совершенно неправильно. Мы знаем напр., что квадраты чисел возрастают тем быстрее, чем больше число, между тем как квадратные корни возрастают, наоборот, медленнее при увеличении числа. Если обозначить буквой Δ разность, полученную от вычитания предыдущего значения функции из последующего, и выписывать эту разность в таблице так, чтобы она стояла в строчке между теми двумя значениями, из которых она получена, то для нескольких значений квадратов и корней квадратных мы получим:

n	n^2	Δ	n	$\sqrt{n}$	Δ
20	400		20	4,4721	
		41			1105
21	441		21	4,5826	
		43			1078
22	484		22	4,6904	
		45			1054
23	529		23	4,7958	
		47			1032
24	576		24	4,8990	

В столбце разностей обыкновенно выписывают для сокращения не все число, а только значащие цифры, так напр. для разности $4{,}8990 - 4{,}7958 = 0{,}1032$ выписано только 1032.

Если бы возрастание функции было пропорционально возрастанию аргумента, то, зная напр. $\sqrt{20} \doteq 4{,}4721$ и $\sqrt{22} \doteq 4{,}6904$, можно было бы вычислить $\sqrt{21}$, воспользовавшись тем, что при возрастании числа на 2 единицы его корень возрастает на $4{,}6904 - 4{,}4721 = 0{,}2183$, следовательно на 1 единицу получим $\frac{0{,}2183}{2} = 0{,}10915$; отсюда $\sqrt{21} \doteq 4{,}4721 + 0{,}10915 = 4{,}58125$,

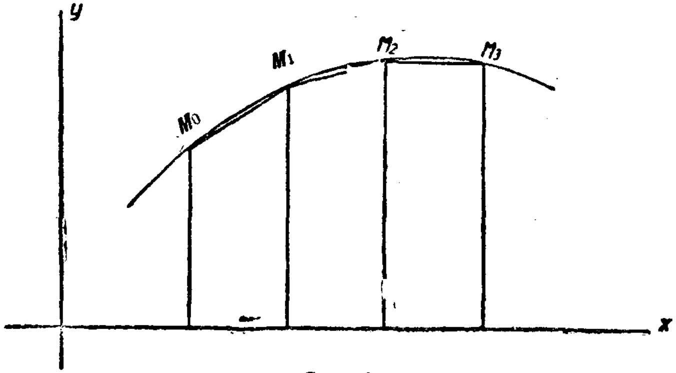

Рис. 1.

и, отбросив последнюю пятерку, получим $\sqrt{21} \doteq 4{,}5812$, в то время как на самом деле $\sqrt{21} \doteq 4{,}5826$, т. е. на 14 единиц последнего знака больше.

Нахождение значения функции, не данного в таблице, но находящегося между двумя данными, называется **интерполированием**. В частности интерполирование в предположении пропорционального возрастания функции называется **линейным интерполированием**. Идею линейного интерполирования проще всего пояснить на чертеже: возьмем график рассматриваемой функции и пометим на нем несколько точек M_0, M_1, M_2, M_3 с абсциссами

x_0, x_1, x_2, x_3 и ординатами y_0, y_1, y_2, y_3 (рис. 1). Все интервалы $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$ возьмем равными h; тогда ординаты перечисленных точек представят собою значения функции, данные в таблицах. Если функция сама непрерывна, то график функции даст нам слитную кривую, проходящую через точки M_0, M_1, M_2, M_3. Проведем через те же точки ломаную, соединив их последовательно отрезками прямых. Очевидно, мы будем тогда иметь приближенное изображение графика функции. Если наклон кривой внутри каждого из интервалов, напр. M_0M_1 меняется мало, то прямая M_0M_1 будет близка к кривой M_0M_1, и мы можем, хотя и с погрешностью, заменить отрезок кривой отрезком прямой. Как известно, прямая представляет собою график пропорциональной зависимости. Если бы данная функция являлась функцией прямой пропорциональности, то точки M_0, M_1, $M_2, \ldots$ лежали бы действительно на одной прямой, и линейное интерполирование не дало бы погрешности. В аналитической геометрии уравнение прямой дается в виде:

$$y = a_0 + a_1 x, \tag{48}$$

где a_0 и a_1 — численные коэффициенты.

Обозначив приращение аргумента x через Δx, а приращение функции y через Δy, получим

$$y + \Delta y = a_0 + a_1(x + \Delta x); \tag{49}$$

вычитая из последнего равенства предыдущее, получим:

$$\Delta y = a_1 \Delta x, \tag{50}$$

откуда видно, что приращение функции пропорционально приращению аргумента. Если взять $\Delta x = h$, т. е. равным интервалу аргумента, данного в таблице, и обозначить $y_1 - y_0 = \Delta y_0$, то получим

$$\Delta y_0 = a_1 h, \text{ откуда } a_1 = \frac{\Delta y_0}{h};$$

следовательно уравнение прямой M_0M_1 будет иметь вид:

$$y = a_0 + \frac{\Delta y_0}{h} x; \tag{51}$$

так как при $x = x_0$, $y = y_0$, то, вставляя эти значения в предыдущее равенство, получим:

$$y_0 = a_0 + \frac{\Delta y_0}{h} x_0, \tag{52}$$

откуда путем вычитания из (51) — (52)

$$y - y_0 = \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0)$$

или

$$y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0); \tag{53}$$

полученное нами уравнение (53) представляет собою обычное уравнение прямой, проходящей через две данные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), в котором произведена только замена $y_1 - y_0 = \Delta y_0$ и $x_1 - x_0 = h$; это уравнение (53) вместе с тем и является формулой линейного интерполирования или, иначе, интерполяционной формулой Ньютона первого порядка. Если значение x лежит между x_0 и x_1, то $\frac{x - x_0}{h}$ представляет собою положительную правильную дробь. Обозначая ее через t, где $0 < t < 1$, получим другой вид формулы:

$$y = y_0 + \Delta y_0 \cdot t. \tag{54}$$

Так напр. в приведенном выше примере нахождения $\sqrt{387,3}$ имеем $y_0 = 19{,}67$, $\Delta y_0 = 19{,}70 - 19{,}67 = 0{,}03$; $t = 0{,}3$ и следовательно $y = 19{,}67 + 0{,}03 \cdot 0{,}3 = 19{,}679 \doteq 19{,}68$.

Такого рода интерполирование известно всем из пользования таблицами логарифмов, где обычно даны не только разности функций Δy, но и произведения этих разностей на 0,1, 0,2, 0,3 ... 0,9, для облегчения вычислений.

Формулу Ньютона можно распространить и на интерполирование второго и высших порядков. Для получения формулы второго порядка возьмем

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{h^2} \cdot k$$

где k пока неизвестный коэффициент. Потребуем теперь, чтобы

$$\begin{aligned} y &= y_0 \text{ при } x = x_0 \\ y &= y_1 \quad \text{»} \quad x = x_1 \\ y &= y_2 \quad \text{»} \quad x = x_2 \end{aligned}$$

Первые два условия очевидно удовлетворяются нашей формулой, так как при $x = x_0$ оба последних члена обращаются в нуль, при $x = x_1$ третий член равен нулю, а так как $x_1 - x_0 = h$, то $y = y_0 + \Delta y_0 = y_1$; подставим теперь в правую часть $x = x_2$; принимая во внимание, что $x_2 - x_0 = 2h$; $x_2 - x_1 = h$, получим

$$y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + 2k,$$

откуда

$$k = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2}.$$

Но

$$y_2 - y_0 = (y_2 - y_1) + (y_1 - y_0) = \Delta y_1 + \Delta y_0.$$

Разность между двумя последовательными значениями разностей функции называют второй разностью или разностью второго порядка и обозначают через Δ^2. Таким образом

$$\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0, \text{ откуда } \Delta y_1 = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0.$$

Следовательно

$$y_2 - y_0 = 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$$

и наконец

$$k = \frac{\Delta^2 y_0}{2}.$$

Окончательно имеем:

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{h^2}\cdot\frac{\Delta^2 y_0}{2}, \tag{55}$$

интерполяционную формулу второго порядка. Формула эта представляет собою уравнение параболы с осью, параллельной оси y, проходящей через точки $M_0(x_0, y_0)$; $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; формула эта опять не является точной, за исключением того случая, когда интерполируемая функция сама представляет собою полином 2-й степени.

В большинстве случаев однако эта формула дает достаточную точность, когда формула 1-го порядка оказывается недостаточно точной.

Обозначая опять

$$\frac{x - x_0}{h} = t;$$

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{(x - x_0) - (x_1 - x_0)}{h} = \frac{x - x_0}{h} - 1 = t - 1.$$

получим

$$y = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0. \tag{56}$$

Выясним теперь вопрос о том, когда нужно пользоваться формулой второго порядка и когда можно ограничиться пользованием формулой первого порядка. Рассмотрим для этого, каково может быть наибольшее абсолютное значение последнего члена формулы второго порядка. Величина $t(1 - t)$ имеет наибольшее абсолютное значение при $t = \frac{1}{2}$, в чем нетрудно убедиться помощью нахождения максимума этой функции по правилам дифференциального исчисления. Но то же видно и из элементарных соображений:

Так как по условию $0 < t < 1$, то $t-1$ отрицательно. Возьмем величину $t(1-t)$ и попробуем найти наибольшее ее значение:

$$t(1-t)=t-t^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+t-t^2=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2.$$

Очевидно, правая часть имеет наибольшее значение, когда $\left(\frac{1}{2}-t\right)^2=0$ или

$$t=\frac{1}{2}, \qquad t(1-t)=\frac{1}{4}.$$

Таким образом наибольшее абсолютное значение третьего члена формулы (56) равно $\frac{\Delta^2 y_0}{8}$; и если $\Delta^2 y_0 < 4$, то $\frac{\Delta^2 y_0}{8} < \frac{1}{2}$.

Следовательно,

если вторая разность функции не превышает 4 единиц последнего знака, то, отбрасывая третий член формулы (56), т. е. пользуясь формулой линейного интерполирования, мы совершаем погрешность меньше $^1/_2$ единицы последнего знака.

Этим правилом обычно пользуются для того, чтобы решить вопрос о применении формулы 1-го и 2-го порядка. На самом деле формула 2-го порядка также не является абсолютно точной, и погрешность при пользовании формулой 1-го порядка зависит не только от величины члена 2-го порядка. При большинстве простейших вычислений однакоже погрешности, зависящие от неточности таблиц и неточности данного значения аргумента, значительно превышают погрешности от отбрасывания членов высших порядков при интерполировании; не останавливаясь на этих вопросах более подробно, укажем только, что в случае, когда третьи разности, т. е. разности между вторыми разностями, меньше 7 единиц последнего знака, то интерполирование 2-го порядка даст погрешность меньше $^1/_2$ единицы последнего знака.

В предыдущем параграфе было указано, что обычные технические таблицы $\sqrt{n}$, даваемые для n от 1 до 1000, не дают возможности найти корни из любого числа с тремя значащими цифрами Так напр. можно найти $\sqrt{886} \doteq 29{,}7658$ и $\sqrt{8{,}86} \doteq 2{,}97658$, но нельзя найти $\sqrt{88{,}6}$. Если не извлекать корня, то можно попробовать найти этот корень путем интерполирования; берем из таблицы.

	Δ	Δ^2
$\sqrt{88} \doteq 9{,}3808$		
$\sqrt{89} \doteq 9{,}4340$	532	-4
$\sqrt{90} \doteq 9{,}4868$	528	-2
$\sqrt{91} \doteq 9{,}5394$	526	

Вторые разности здесь не превышают 4 единиц, а потому можно воспользоваться линейной формулой:

$$\sqrt{88,6} \doteq 9,3808 + 0,6 \cdot 0,0532 \doteq 9,4127.$$

Однако таким же способом вычислить $\sqrt{36,6}$ нельзя; в самом деле:

	Δ	Δ^2
$\sqrt{36} \doteq 6,0000$		
	828	
$\sqrt{37} \doteq 6,0828$		-12
	816	
$\sqrt{38} \doteq 6,1644$		-10
	806	
$\sqrt{39} \doteq 6,2450$		

Здесь вторые разности столь велики, что если потребовать точности до 4-го десятичного знака, их нельзя не учесть.

Пользуясь формулой (56), получим:

$$\sqrt{36,6} \doteq 6,0000 + 0,6 \cdot 0,0828 + \frac{0,6 \cdot (-0,4)}{2}(-0,0012) =$$
$$= 6,0000 + 0,04968 + 0,00014 \doteq 6,0498.$$

Наконец, для нахождения $\sqrt{10,6}$ мы имели бы таблицу

	Δ	Δ^2	Δ^3
$\sqrt{10} \doteq 3,1623$			
	1543		
$\sqrt{11} \doteq 3,4641$		-78	
	1475		18
$\sqrt{12} \doteq 3,4641$		-60	
	1415		
$\sqrt{13} \doteq 3,7417$			

Здесь уже третьи разности столь значительны, что даже второй порядок формулы является недостаточным.

Необходимо всегда учитывать изложенное и не пользоваться линейным интерполированием в случаях, когда вторые разности велики. К сожалению в большинстве справочников на это не обращено внимания и нет указаний на то, когда можно и когда нельзя пользоваться линейным интерполированием.

Скажем теперь еще несколько слов об интерполировании по таблицам функций от двух аргументов. Для случая линейного интерполирования мы и здесь предполагаем, что функция изменяется пропорционально изменению каждого аргумента. Пусть нам дана функция

$$z = f(x, y)$$

и известно из таблиц значение $z_{0,0}$ при $x = x_0$ и $y = y_0$ и точно так же $z_{1,0}$ при $x = x_1$, $y = y_0$, $z_{0,1}$ при $x = x_0$, $y = y_1$; обозначим интервалы $x_1 - x_0 = h$; $y_1 - y_0 = k$; тогда для линейного интерполирования будем иметь

$$z = z_{0,0} + \frac{x - x_0}{h}(z_{1,0} - z_{0,0}) + \frac{y - y_0}{k}(z_{0,1} - z_{0,0}). \qquad (57)$$

Разность $z_{1,0} - z_{0,0}$ представляет собою изменение z, зависящее только от изменения одного x; разность $z_{0,1} - z_{0,0}$, наоборот, изменение z, зависящее от изменения одного y. Если бы функция z была точно линейной относительно x и y, то при подстановке в предыдущую формулу $x = x_1$ и $y = y_1$ мы должны были бы получить

$$z_{1,1} = z_{0,0} + (z_{1,0} - z_{0,0}) + (z_{0,1} - z_{0,0}).$$

Обратимся к примеру, приведенному на стр. 115, табл. 8.

$$\begin{aligned} \text{При } t &= 0^\circ,\ p = 760;\ \gamma = 0{,}777 \\ t &= 5^\circ,\ p = 760;\ \gamma = 0{,}791 \\ t &= 0^\circ,\ p = 770;\ \gamma = 0{,}766 \end{aligned}$$

$$h = 5^\circ;\ k = 10;\ z_{1,0} - z_{00} = 0{,}791 - 0{,}777 = 0{,}014$$

$$z_{0,1} - z_{0,0} = 0{,}766 - 0{,}777 = -0{,}011$$

Сумма 0,003

Следовательно при $t = 5^\circ$, $p = 770$ мы должны были бы в случае линейной функции получить $\gamma = 0{,}777 + 0{,}003 = 0{,}780$. По таблице находим $\gamma = 0{,}781$. Разница в единицу последнего знака столь невелика, что не может служить препятствием к линейному интерполированию. Конечно, надо и здесь отдельно посмотреть, насколько наша функция близка к линейной для каждого аргумента, т. е. обратиться ко вторым разностям. Имеем при $p = 760$ *мм*

t	γ	$\Delta\gamma$	$\Delta^2\gamma$
0°	0,777		
		14	
5°	0,791		0
		14	
10°	0,805		

Точно так же при $= 0^\circ$

p	γ	$\Delta\gamma$	$\Delta^2\gamma$
760 *мм*	0,777		
		−11	
770 »	0,766		2
		−9	
780 »	0,757		

Функцию γ можно считать достаточно близкой к линейной и следовательно интерполировать по приведенной формуле:

для $t = 3^\circ$ и $p = 767$ *мм*; получим

$$\gamma = 0{,}777 + \frac{3}{5}\cdot 0{,}014 - \frac{7}{10}\cdot 0{,}011 \doteq 0{,}777 + 0{,}0084 - 0{,}0077 \doteq 0{,}778.$$

Пример 143. Рассмотреть таблицы натуральных тригонометрических величин $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, данных с 4 десятичными знаками в пределах $0-45^\circ$ через 1°. Показать, что для $\sin\alpha$ внутри всего этого интервала можно линейным интерполированием получать синусы углов с точностью до минуты с 4 знаками, между тем как для тангенсов только в части этого интервала допустимо линейное интерполирование. Определить, до какого угла допустимо линейное интерполирование для тангенсов.

Вычислить путем линейного интерполирования помощью тех же таблиц синусы и тангенсы углов от 5° до 6° через каждые $6'$.

Пример 144. Составить табличку $\sqrt{n}$ так, чтобы помощью линейного интерполирования можно было получать для всех чисел n, заданных с двумя значащими цифрами, корни с тремя значащими цифрами.

Пояснение. Обычно в таблицах приводятся (как напр. у Брадиса) $\sqrt{n}$ для чисел от 1 до 99; как было выше рассмотрено, по ним можно найти непосредственно напр. $\sqrt{36}$ и $\sqrt{0{,}36}$, но $\sqrt{3{,}6}$ можно найти только путем интерполирования. Однако не во всех областях этой таблицы линейное интерполирование даже до 3-й значащей цифры будет допустимо. В начале таблицы оно явно невозможно, как это видно из определения разностей

$$\begin{array}{lcc} & \Delta & \Delta^2 \\ \sqrt{1}=1{,}00 & & \\ & 41 & \\ \sqrt{2}=1{,}41 & & -9 \\ & 32 & \\ \sqrt{3}=1{,}73 & & \end{array}$$

Следовательно, надо начинать таблицу не с $n=1$, а напр. с $n=10$, но при этих условиях в таблице будут отсутствовать корни из 1, 2... 9 и тем самым корни из 1,1; 1,2 и т. д. Как дополнить таблицу простейшим образом, чтобы и эти корни можно было найти либо непосредственно, либо путем линейного интерполирования?

Пример 145. Составить таблицу вещественных значений

$$k=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \quad \text{для } p=0,\ 1,\ 2\ldots 10;\ q=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm 10.$$

Со сколькими знаками после запятой можно взять числа k, так чтобы возможно было линейное интерполирование?

§ 22. Полная погрешность при пользовании таблицами.

Выше был уже рассмотрен вопрос о возможной погрешности при пользовании таблицами, зависящей от интерполирования. Рассмотрим теперь всю совокупность возможных погрешностей,

1. Погрешность таблиц, зависящая от закругления последнего знака. Эта погрешность не должна превышать половины единицы последней значащей цифры.

2. Погрешность интерполирования, которая также не должна превышать половины единицы последнего знака.

Могут ли обе эти погрешности сложиться? Обратимся к чертежу (рис. 2). Предположим, что кривая M_1M_2 представляет собою точный график функции, для которой составлены таблицы OP_1 и OP_2—два последовательных значения аргументов той же таблицы. В таблицах на самом деле даны не точные значения функции, равные ордина-

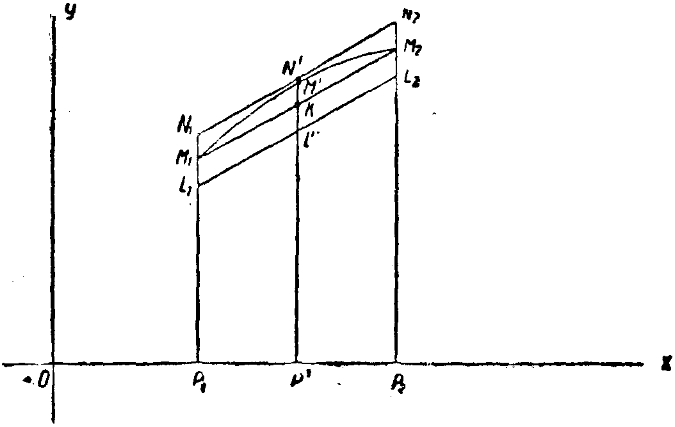

Рис. 2.

там M_1P_1 и M_2P_2, а закругленные, которые могут быть больше или меньше истинных не более, чем на $^1/_2$ единицы последнего знака. Пусть отрезки M_1N_1, M_1L_1, M_2N_2 и M_2L_2 равны в некотором масштабе половине единицы последнего знака. Таким образом два данные в таблице числа изображаются точками внутри интервалов L_1N_1 и L_2N_2; может случиться, что оба числа даны с избытком или с недостатком. Возьмем напр. случай, когда оба числа даны с недостатком и притом наибольшим, т. е. данные числа соответствуют точкам L_1 и L_2.

Линейному интерполированию соответствует на графике прямая линия, причем согласно условию наибольшая разность ординат кривой M_1M_2 отличается от прямой M_1M_2 не больше, чем на половину единицы последнего знака. На нашем чертеже это соответствует абсциссе OP', для которой истинное значение функции равно $P'M'$, погрешность интерполирования равна KM', погрешность, зависящая от неправильных (закругленных) значений функции, сверх того равна $L'K$; полная погрешность может, следовательно, в худшем случае равняться $L'K + KM' = L'M'$, т. е. целой единице последней значащей цифры.

3. К двум этим погрешностям однако присоединяется еще третья: при интерполировании мы должны прибавить к значению y_0 член $\Delta y_0 t$; эта поправка в свою очередь закругляется нами до $^1/_2$ единицы той цифры, которая является последней значащей цифрой таблицы; погрешность этого закругления может присоединиться к предыдущим, и мы получим общую погрешность до $1^1/_2$ единиц последнего знака.

Пример 146. В таблицах дано

	Δ	Δ^2
$\sqrt[3]{12} \doteq 2,289$		
	62	
$\sqrt[3]{13} \doteq 2,351$		-3
	59	
$\sqrt[3]{14} \doteq 2,410$		

В данном случае допустимо линейное интерполирование. Найдем

$$\sqrt[3]{12,3} \doteq 2,289 + 0,062 \cdot 0,3 = 2,289 + 0,0186 \doteq 2,289 + 0,019 = 2,308$$

$$\sqrt[3]{12,5} \doteq 2,289 + 0,062 \cdot 0,5 = 2,289 + 0,031 = 2,320$$

$$\sqrt[3]{12,7} \doteq 2,289 + 0,062 \cdot 0,7 = 2,289 + 0,0434 \doteq 2,289 + 0,043 = 2,332$$

Более точное вычисление дает

$$\sqrt[3]{12,3} \doteq 2,30835$$
$$\sqrt[3]{12,5} \doteq 2,32079$$
$$\sqrt[3]{12,7} \doteq 2,33311$$

Таким образом погрешности корней соответственно равны: 0,35; 0,79; 1,11 единицы последнего знака. Большие погрешности получались здесь главным образом из-за того, что оба числа $\sqrt[3]{12}$ и $\sqrt[3]{13}$ взяты нами с погрешностями одного знака, так как более точно $\sqrt[3]{12} = 2,28943$ и $\sqrt[3]{13} = 2,35133$; к этим погрешностям присоединилась погрешность от интерполирования, которая была того же знака, но сравнительно невелика, и наконец погрешность от закругления интерполяционной поправки. В случае $\sqrt[3]{12,3}$ эта последняя погрешность была другого знака и отчасти компенсировала первые; при $\sqrt[3]{12,5}$ эта погрешность равнялась нулю, и первые две вместе дали 0,79, и наконец при $\sqrt[3]{12,7}$ к первым двум погрешностям присоединилась еще и третья, равная 0,4 последнего знака, что и дало в сумме 1,11 последнего знака.

4. Приведенными выше тремя погрешностями еще не исчерпывается общая погрешность при пользовании таблицами. В самом деле, мы до сих пор предполагали, что аргумент, для которого мы ищем значение функции, задан точно. На самом деле обычно приходится считаться с тем, что самый аргумент задан также приближенно. Так напр. в приведенном нами примере числа 12,3; 12,5; 11,7 могли быть приближенными с погрешностью до $^1/_2$ единицы последнего знака, т. е. с относительной погрешностью около:

$$\frac{1}{2 \cdot 125} = \frac{1}{250}.$$

Относительная погрешность кубического корня, как известно, приближенно в три раза меньше, т. е. около $\frac{1}{250 \cdot 3} = \frac{1}{750}$, откуда предельная абсолютная погрешность корней приближенно равна

$$2{,}33 \cdot \frac{1}{750} = 0{,}0031.$$

Таким образом мы могли получить погрешность только от одной этой причины свыше 3 единиц четвертой значащей цифры. Само собою разумеется, что этого можно было ожидать. Мы взяли у аргумента всего 3 точных значащих цифры, а у функции пытались найти 4, что по изложенным выше правилам совершенно недопустимо. Однакоже, если бы мы взяли у аргумента 4 точных цифры, например $\sqrt[3]{12{,}70}$, последняя погрешность все же могла оказаться заметной. В самом деле, в этом последнем случае как абсолютная, так и относительная погрешность аргумента, а следовательно и функции была бы в 10 раз меньше и следовательно не превышала бы 0,3 единицы последней значащей цифры. Если бы случайно она была одного знака с погрешностями, о которых было сказано раньше, то общая сумма дала бы, например в случае $\sqrt[3]{12{,}7}$, всего $1{,}1 + 0{,}3 = 1{,}4$ единицы последней значащей цифры.

Погрешность функции, зависящую от погрешности аргумента, не трудно приближенно определить при помощи таблиц. В самом деле, если интервал аргумента равен h, а табличная разность функции Δy, то, допуская линейное интерполирование, при изменении x на α функция изменится на

$$\eta = \frac{\alpha}{h} \Delta y. \tag{58}$$

Величина η и будет погрешность функции, зависящая от погрешности α аргумента. В случае, когда линейное интерполирование недопустимо, можно определить величину η и помощью интерполирования второго порядка. Обозначив $\frac{\alpha}{h} = t_1$ получим, применяя формулу Ньютона:

$$\eta = t_1 \Delta y + \frac{t_1(t_1 - 1)}{2} \Delta^2 y.$$

Пользоваться этой формулой второго порядка на практике приходится лишь в исключительных случаях. Величина α всегда весьма мала по сравнению с h, и следовательно t_1 малая правильная дробь $\left(\text{обычно не более } \frac{1}{20}\right)$, а так как $\Delta^2 y$ также значительно меньше, чем Δy, то почти всегда можно ограничиться пользованием формулой (58).

Сделаем общую сводку. Общая погрешность при пользовании таблицами складывается из четырех величин:

a) предельной погрешности от неточности таблиц $\eta = 0{,}5$ последней значащей цифры;

b) предельной погрешности интерполирования $\eta_2 \doteq \frac{1}{8} \Delta^2 y$, в интервале, где допустимо линейное интерполирование, $\eta_2 < 0{,}5$ последней значащей цифры;

c) предельной погрешности от закругления интерполяционной поправки $\eta_3 = 0{,}5$ последней значащей цифры;

d) предельной погрешности, зависящей от погрешности аргумента α_4.

$$\eta \doteq \frac{\alpha_4}{h} \Delta y.$$

Общая предельная погрешность при пользовании таблицами в интервалах, где можно допустить линейное интерполирование, равна грубо:

$$\eta = \left(\frac{3}{2} + \alpha_4 \frac{\Delta_y}{h}\right) \tag{59}$$

единиц последней значащей цифры.

Пример 147. Рассматривая таблицы логарифмов, данные с k знаками, все равно, будет ли k равно 3, 4, 5, мы видим, что при

$h=10$ единицам последней значащей цифры, $\Delta y=43$ единицам последней значащей цифры, когда число $n=10^{k-1}$; в дальнейшем Δy убывает, доходя до 4 единиц последней значащей цифры при $n=10^k$. Таким образом $\frac{\Delta y}{h}$ изменяется от 4,3 до 0,4 единицы последней значащей цифры. Ниже мы еще подробнее рассмотрим таблицы и выясним, что погрешность от линейного интерполирования по ним ничтожно мала и ею можно пренебречь. В этом случае полная погрешность при пользовании таблицами логарифмов не превышает

$\eta=1+\frac{1}{2}\cdot 4{,}3=3{,}2$ единиц последней значащей цифры в начале таблиц

$\eta=1+\frac{1}{2}\,0{,}4=1{,}2$ един. последней значащей цифры в конце таблиц.

Найдем по четырехзначным таблицам $\lg 1{,}032$.

Из таблиц имеем

		Δ
$\lg 1{,}03 \doteq 0{,}0128$		
		42
$\lg 1{,}04 \doteq 0{,}0170$		
		42
$\lg 1{,}05 = 0{,}0212$		

$$\lg 1{,}032 \doteq 0{,}0128+0{,}2\cdot 0{,}0042 \doteq 0{,}0128+0{,}00084=0{,}0136.$$

По более точным таблицам находим $\lg 1{,}032=0{,}01368$.

Предположим теперь, что число 1,032 имело погрешность до $^1/_2$ последнего знака, тогда его логарифм может получить погрешность $\eta_4=\frac{1}{2}\cdot\frac{42}{10}=2{,}1$ единицы последней значащей цифры. Общая погрешность достигла бы $0{,}8+2{,}1=2{,}9$ единицы последней цифры.

В самом деле, если бы точное число равнялось 1,0325, то его логарифм был бы 0,01389 или с четырьмя знаками после запятой 0 0139, на 3 единицы последнего знака больше, чем нами было получено.

Пример 148. Определить полную погрешность при нахождении площади круга по таблицам для $\frac{\pi n^2}{4}$, данным через одну сотую для n с четырьмя значащими цифрами, при $n=5{,}635$ ($^1/_2$).

По таблицам Брадиса находим:

n	$\frac{\pi n^2}{4}$	Δ
5,63	24,89	
		9
5,64	24,98	
		9
5,65	25,07	

Интерполируя, определяем для $n = 5,635$;

$$\frac{\pi n^2}{4} \doteq 24,93.$$

По более точным таблицам (напр. Hütte) имеем:

n	$\frac{\pi n^2}{4}$	Δ	Δ^2
5,63	24,8947		
		885	
5,64	24,9832		2
		887	
5,65	25,0719		

Мы видим, что благодаря малому значению второй разности ошибка от линейного интерполирования не отразится даже на четвертом десятичном знаке. Она будет не больше 0,000025. Между тем ошибка от неточности таблиц даст заметную погрешность, так как оба данные числа у Брадиса взяты с недостатком, первое на 0,0047 и второе на 0,0032. Для середины интервала имеем погрешность $\frac{0,0047 + 0,0032}{2} \doteq 0,0040$. Интерполяционная поправка при неточно взятых числах должна была равняться $0,5 \cdot 0,9 = 0,045$; между тем нами она взята 0,04. Таким образом мы имеем погрешность $0,0040 + 0,0050 = 0,0090$. К этому надо присоединить погрешность от неточно заданного числа. На 0,0005 приращения для аргумента мы получим 0,0044 для функции. Общая погрешность может, следовательно, равняться 0,0134, т. е. превысить единицу второго десятичного знака. В самом деле, точное вычисление показывает, что при $n = 5,63549$, $\frac{\pi n^2}{4} = 24,9433$, на 0,0133 больше, чем нами получено по таблицам.

Пример 149. Найдем по таблицам Брадиса $\operatorname{tg} 59°10'$. Находим

	Δ	Δ^2
$\operatorname{tg} 59°\ 6' \doteq 1,6709$		
	66	
$\operatorname{tg} 59°12' \doteq 1,6775$		1
	67	
$\operatorname{tg} 59°18' \doteq 1,6842$		

$$\operatorname{tg} 59°10' \doteq 1,6709 + 0,0066 \cdot \frac{4}{6} = 1,6709 + 0,0044 = 1,6753.$$

По более точным таблицам. Пржевальского находим без интерполирования $\operatorname{tg} 59^\circ 10' \doteq 1,67530$.

Таким образом погрешности таблиц и интерполирования в данном смучае, повидимому взаимно компенсировав друг друга, не дали погрешности даже в пятом десятичном знаке. Пусть однако же данный угол содержал погрешность $\varepsilon = 0,5'$, тогда $t_1 = \frac{\varepsilon}{h} = \frac{0,5}{6} = \frac{1}{12}$; и $\eta_4 = 66 \cdot \frac{1}{12} = 5,5$ единиц последнего знака.

Примечание. Значение $\operatorname{tg} 59^\circ 10' \doteq 1,6753$ было получено нами без помощи пользования данными у Брадиса справа интерполяционными поправками. Как мы уже указывали, эти поправки иногда заключают погрешность до единицы последнего знака и в данном случае с помощью этих поправок мы получили бы $\operatorname{tg} 59^\circ 10' = 1,6752$, т. е. с погрешностью на одну единицу.

Пример 150. Для таблиц $\sqrt[3]{n}$ данных для $100 < n < 1000$ через одну единицу с 4-мя значащими цифрами определить полную предельную погрешность при пользовании таблицами, причем отдельно рассмотрет интервалы около $n = 100$, $n = 500$ и $n = 1000$.

Пример 151. Составить таблицу функции $y = x + \frac{1}{x}$ для $1 < x < 10$ и интервалов $h = 0,5$ с тремя значащими цифрами. Рассмотреть предельную погрешность при пользовании такими таблицами в разных интервалах.

Пример 152. Рассмотреть таблицу логарифмов синусов малых углов ($0—8^\circ$) данную через $1'$ (Брадиса или Пржевальского), взяв четыре десятичных знака. Определить, в какой области полная погрешность пользования таблицами (не считая погрешности от неточности данного угла) не превысит 1,5 единиц последнего знака. Предполагая неточность данного угла до $0,1'$, определить погрешнось, зависящую от этой неточности.

§ 23. Нахождение аргумента по заданному значению функции помощью таблиц.

Предположим сначала, что данное нам значение функции не содержит погрешности, т. е. задано точно. Если случайно в таблице найдется именно такое значение функции, как данное нам, то по нему мы сразу найдем искомое значение аргумента. Значение это однако может содержать погрешность, величину которой попробуем определить.

Пример 153. Возьмем таблицы Бралиса квадратов чисел и найдем по ним обратно корень из числа. Пусть требуется найти $\sqrt{20,79}$. По таблице находим, что $20,79 \doteq 4,56^2$, следовательно $\sqrt{20,79} = 4,56$; однако на самом деле $4,56^2 \doteq 20,7936$, т. е. квадрат взят нами с абсолютной погрешностью 0,0036 и с относительной $\frac{36}{207\,936} \doteq \frac{36}{200\,000} = 0,00018$; относительная погрешность корня вдвое меньше $\delta = 0.00009$ и абсолютная погрешность $\Delta = 0,00009 \cdot 4,56 \doteq 0,00041$. Таким образом найденный корень имеет три точных цифры после запятой и погрешность последней меньше половины; $\sqrt{20,79} \doteq 4,560$ (0,5).

По четырем точным значащим цифрам функции найдены четыре значащих цифры аргумента. Не всегда однако результат получается столь хорошим; все зависит от того, какая функция нам дана и в каком интервале.

Пример 154. По таблицам длины окружности по данному диаметру находим, что для $\pi n = 11,88$ $n \doteq 3,78$, между тем как путем деления $\frac{11,88}{\pi}$ находим $n = 3,78152\ldots$, т. е. погрешность, превышающую $1^1/_2$ единицы четвертой значащей цифры. Выяснить самостоятельно происхождение такой погрешности.

Если данное значение функции не находится в таблице, то приходится получить значение аргумента путем так называемого обратного интерполирования. Берем ту же формулу линейного интерполирования, которую мы имели:

$$y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0).$$

Теперь нам дано y и надо найти x; разрешая относительно x, получим:

$$x = x_0 + \frac{h}{\Delta y_0}(y - y_0). \tag{60}$$

Полученная формула чрезвычайно похожа на предыдущую. На место x стало y, и обратно, и коэфициент при $y - y_0$ равен обратной величине коэфициента при $x - x_0$ в первой формуле.

Для грубой оценки погрешности линейного интерполирования, предположим опять, что формула (55) интерполирования второго порядка была бы точной:

$$y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1).$$

Обозначим последний член правой части через R, тогда получим:

$$x = x_0 + \frac{h}{\Delta y_0}(y - y_0) - \frac{R \cdot h}{\Delta y_0}.$$

Если снова воспользоваться введенным выше обозначением:

$$\frac{x - x_0}{h} = t, \text{ то } R = \frac{\Delta^2 y_0}{2} t(t-1)$$

и наша формула примет вид:

$$x = x_0 + \frac{h}{\Delta y_0}(y - y_0) + \frac{\Delta^2 y_0 h}{2\Delta y_0} t(1 - t).$$

Выше было уже показано, что наибольшее возможное абсолютное значение $|t(1-t)| = \frac{1}{4}$; следовательно, при сделанном нами предположении предельная погрешность при пользовании обратным линейным интерполированием будет около

$$\frac{1}{8}\Delta^2 y_0 \cdot \frac{h}{\Delta y_0}. \tag{61}$$

Напомним, что при прямом интерполировании мы имели соответствующую погрешность равной

$$\frac{1}{8}\Delta^2 y_0.$$

Нас интересует обычно, конечно, не абсолютное значение погрешности, а лишь ее выражение в единицах последней значащей цифры. Если мы выразим h и Δy_0 в единицах последней значащей цифры аргумента и функции, данных в таблицах, то увидим, что если $\frac{h}{\Delta y_0} > 1$, т. е. интервалы аргумента больше первых разностей функции (выраженных в единицах последней цифры), то погрешность обратного интерполирования может быть больше погрешности прямого, в противном случае меньше.

Пример 155. Посмотрим снова таблицу квадратов, данную у Брадиса. Аргументы даны там для чисел от 1,00 до 9,99 через одну сотую, т. е. выражая интервал h в единицах четвертой значащей цифры, которую мы хотим найти интерполированием $h = 10$; разность функции в единицах последней значащей цифры для n между 1,00 и 3,16 возрастает от 20 до 43, для n от 3,16 и до 5,00 разности возрастают от 6 и до 10 и при $n > 5{,}00$ разности снова более 10 и доходят до 20. Таким образом только для аргумента от 3,16 до 5,00 обратное интерполирование могло бы дать погрешность немного бо́льшую, чем прямое, но так как вторые разности здесь всюду очень малы, меньше единицы, то очевидно обратное интерполирование по этим таблицам допустимо повсюду.

Иначе обстоит дело, например, с таблицами синусов или логарифмов синусов. Как известно, синусы углов возрастают медленнее, чем самые углы, выраженные в дуговой мере. Тоже относится и к логарифмам синусов при углах близких к 90°.

Пример 156. Выпишем табличку логарифмов синусов углов (в угловой и дуговой мере) через 1°, начиная с 84°, с точностью до четвертого десятичного знака:

	Δ	Δ^2
$\lg \sin 84° \doteq \lg \sin 1,4661 \doteq \bar{1},9976$		
	7	
$\lg \sin 85° \doteq \lg \sin 1,4835 \doteq \bar{1},9983$		1
	6	
$\lg \sin 86° \doteq \lg \sin 1,5010 \doteq \bar{1},9989$		1
	5	
$\lg \sin 87° \doteq \lg \sin 1,5184 \doteq \bar{1},9994$		

Прямое интерполирование здесь, очевидно, возможно, так как вторые разности равны единицам. Однако приращение аргумента здесь равно $1° \doteq 0,0174$, т. е. 174 единицам последнего знака, в то время как разность функции всего 5—7 единиц.

Таким образом $\frac{h}{\Delta y_0} \doteq \frac{174}{6} = 29$. Очевидно, что обратное интерполирование может дать большую погрешность.

Так например, пусть дано $\lg \sin x \doteq \bar{1},9985$. Очевидно, получим

$$x \doteq 85° + \frac{2}{6} \doteq 85°20' \doteq 1,4835 + \frac{2}{6} \cdot 0,0174 =$$
$$= 1,4835 + 0,0058 = 1,4893.$$

Между тем по более точным таблицам находим

$$x \doteq 85°14'26'' \doteq 1,4877.$$

Таким образом нами получена погрешность в 16 единиц последнего знака. Само собою разумеется, что погрешность отчасти могла бы получиться за счет закругления последней цифры, но столь большой она быть не могла. Интерполируя по таблицам с 7 знаками, мы получили бы $x \doteq 85°20'7''$, т. е. почти то же самое, потому что мы имеем ту же интерполяционную погрешность.

Нетрудно видеть, что при малых углах обратное интерполирование можно производить спокойно.

К сожалению, в таблицах и справочниках почти никогда не обращают внимания на изложенное свойство погрешностей при обратном интерполировании.

К рассмотренным выше погрешностям надо присоединить еще погрешности от закругления данных в таблице чисел и закругления найденного после интерполирования числа. Первую погрешность мы уже рассмотрели для случая, когда данное число находится в таблице. Если его в таблице нет, то приходится взять два числа, между которыми оно лежит. Погрешности обоих чисел в худшем случае могут быть одного и того же знака и достигать $^1/_2$ единицы последнего знака. При линейном интерполировании эта погрешность распространится на все значения функции внутри всего интервала. Таким образом предельная погрешность, зависящая от закругления чисел, в таблицах одинакова, находится ли число в таблице или нет. Остается только погрешность от закругления найденной при интерполировании поправки, которая не превышает 0,5 единицы последнего знака.

До сих пор мы предполагали, что данное нам число точное. Если же оно само неточно и содержит погрешность в 0,5 единицы последнего знака, то эта погрешность вызовет погрешность аргумента совершенно такой же величины, как та, которая произошла от закругления последней цифры данного в таблице значения. В самом деле, при рассмотренном выше примере мы имели по таблицам Брадиса $\sqrt{20{,}79} \doteq 4{,}56$, но на самом деле $4{,}56^2 = 20{,}7936$. Погрешность данного в таблице числа от закругления выражалась в 0,36 единицах последнего знака. Однако мы предполагали, что число 20,79 дано точно. Если оно содержит погрешность до 0,5 единицы последнего знака, то оно может быть само равно даже 20,785 и, следовательно, общая погрешность числа, которое мы берем, равна $20{,}7936 - 20{,}785 = 0{,}0086$. Наибольшая погрешность могла бы быть до 0,01, т. е. до единицы последнего знака.

Сделаем окончательную сводку полной погрешности при обратном нахождении аргумента, по заданной функции. Если для данного интервала аргумента h функция получает приращение Δy_0, то для погрешности аргумента α, как было показано в предыдущем параграфе, погрешность функции $\eta = \frac{\Delta y_0}{h} \cdot \alpha$.

Отсюда обратно:

$$\alpha = \frac{h}{\Delta y} \eta.$$

Таким образом имеем следующие четыре погрешности:

а) Предельную погрешность от неточности таблиц; так как погрешность таблиц не превышает $^1/_2$ единицы последней значащей цифры, то при условии пренебрежения вторыми разностями:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{\Delta y}$$

единицы последней значащей цифры.

b) Предельную погрешность интерполирования приближенно равную

$$\alpha_2 = \frac{1}{8} \Delta^2 y \cdot \frac{h}{\Delta y};$$

предполагая, что

$$\frac{1}{8} \Delta^2 y < \frac{1}{2},$$

получим

$$\alpha_2 < \frac{1}{2} \frac{h}{\Delta y}$$

единицы последнего знака.

c) Предельную погрешность от закругления найденной при интерполировании поправки $\alpha_3 = \frac{1}{2}$ единицы последнего знака.

d) Предельную погрешность, зависящую от погрешности η_4 данного числа, равную приближенно

$$\alpha_4 = \frac{h}{\Delta y} \eta_4$$

единицы последнего знака.

Общая предельная погрешность, при условии пренебрежения вторыми разностями равна

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \left[(1 + \eta_4) \frac{h}{\Delta y} + \frac{1}{2} \right] \qquad (62)$$

единиц последнего знака.

Если погрешность заданного числа не превышает $^1/_2$ единицы последнего знака, то при нахождении значения функции по данному значению аргумента по формуле (49) получим

$$\eta = \left[\frac{3}{2} + \frac{\Delta y}{2h} \right] \qquad (63)$$

единиц последнего знака, и при нахождении аргумента, по данному значению функции

$$\alpha = \left[\frac{3}{2} \frac{h}{\Delta y} + \frac{1}{2} \right] \qquad (64)$$

единиц последнего знака.

Отсюда следует, что в этом последнем случае

$$\alpha = \eta \cdot \frac{h}{\Delta y}. \tag{65}$$

Формула (65) чрезвычайно проста, однако же вполне применима для грубой оценки погрешности.

Пример 157. Для таблиц логарифмов мы имели в прошлом параграфе, что $\eta = 3{,}2$ единицы последней значащей цифры в начале таблицы и $1{,}2$ — в конце. $\frac{\Delta y}{h} \doteq 4{,}3$ в начале и $0{,}43$ в конце. $\frac{h}{\Delta y} = 0{,}23$ в начале и $2{,}3$ в конце таблицы. Отсюда следует, что $\alpha \doteq 3{,}2 \cdot 0{,}23 \doteq 0{,}74$ в начале таблицы и $\alpha \doteq 1{,}2 \cdot 2{,}3 \doteq 2{,}76$ в конце таблицы.

В следующей главе мы увидим, что при пользовании таблицами логарифмов погрешности могут быть еще больше, так как погрешности данных чисел часто превышают $^1/_2$ единицы последнего знака.

Пример 158. В технических справочниках обычно дается таблица длины дуги l и площади сегмента F по данной величине стрелки сегмента f при хорде равной единице. В таблицах, помещенных в календаре Астафьева, имеем:

f	F	ΔF
0,452	0,3460	
		19
0,454	0,3479	
		19
0,456	0,3498	

Просматривая таблицу далее, видим, что вторые разности очень малы, так как первые разности идут без изменения на большом протяжении. Интерполяционной ошибкой можно пренебречь. Пусть требуется найти F для $f \doteq 0{,}4527$ $(^1/_2)$; $h = 20$ единиц четвертой значащей цифры; $\Delta F = 19$; $t = \frac{7}{20}$; $F \doteq 0{,}3460 + \frac{7}{20} \cdot 19$

$$F \doteq 0{,}3460 + 6{,}65 \doteq 0{,}3467.$$

Предельная погрешность от неточности таблиц $\eta_1 = 0{,}5$.

Предельная погрешность от закругления при интерполировании $\eta_2 = 0{,}5$.

Предельная погрешность от неточности данного числа

$$\eta_4 = \frac{0{,}5 \cdot 19}{20} \doteq 0{,}48.$$

Пренебрегая погрешностью при интерполировании, получим, что общая предельная погрешность $\eta = 1{,}48 < 1{,}5$ единиц последнего знака.

Следовательно $F = 0{,}3467$ (1,5).

При обратном нахождении аргумента по данному числу получим

$$\alpha = \eta \cdot \frac{h}{\Delta y} = 1{,}5 \cdot \frac{20}{19} = 1{,}58 < 1{,}6.$$

Так например, если дано $F \doteq 0{,}3472$, находим:

$$f \doteq 0{,}4520 + \frac{12 \cdot 20}{19} \doteq 0{,}4520 + 12{,}6 \doteq 0{,}4533 \ (1{,}6).$$

В данном примере погрешность при прямом и обратном пользовании таблицами почти одинакова.

Пример 159. В справочнике Дуббеля (стр. 637) даны таблицы для вычисления толщины стенок труб при избыточном внутреннем давлении. Аргументом служит $\frac{p_i}{k_z}$ отношение избыточного давления к допускаемому напряжению материала, функцией $\varphi = \frac{r_a}{r_i}$ отношение наружного диаметра трубы к внутреннему. Выписываем часть таблицы из ее начала, середины и конца:

$\frac{p_i}{k_z}$	φ	$\frac{p_i}{k_z}$	φ	$\frac{p_i}{k_z}$	φ
0,01	1,009	0.31	1,372	0,61	2,451
0,02	1,017	0,32	1,390	0,62	2,536
0,03	1,026	0.33	1,408	0.63	2.630
0,04	1,035	0,34	1,427	0,64	2,734
0,05	1,044	0,35	1,444	0,65	2,851

Выяснить полную предельную погрешность при обратном пользовании выписанными участками таблицы, с учетом погрешности при интерполировании.

Пример 160. При „нормальных" условиях атмосферы отношение давления воздуха p на высоте H *м* к давлению p_0 на уровне моря выражается таблицей:

H	$\frac{p}{p_0}$	H	$\frac{p}{p_0}$	H	$\frac{p}{p_0}$
500	0,942	3 500	0,649	7 000	0,407
1 000	0,887	4 000	0,609	7 500	0,380
1 500	0,834	4 500	0,571	8 000	0,354
2 000	0,785	5 000	0,534	8 500	0,329
2 500	0,737	5 500	0,500	9 000	0,306
3 000	0,692	6 000	0,467	9 500	0,285
		6 500	0,437	10 000	0,264

Определить полную предельную погрешность при пользовании таблицей (прямом и обратном), выяснить возможность линейного интерполирования и число точных знаков, получаемых по таблице.

Пример 161. Составить таблицу экваториальных моментов инерции круглого сечения по формуле

$$I=\frac{\pi d^4}{64}=\frac{Fd^2}{16},$$

где d — диаметр сечения, F — площадь сечения. Таблицу можно составить, пользуясь таблицами $F=\frac{\pi d^2}{4}$; принять $d=10,\ 11, —$ 19, 20. Со сколькими значащими цифрами имеет смысл составлять таблицу, чтобы по ней возможно было прямое и обратное линейное интерполирование? Определить предельную погрешность при пользовании составленной таблицей.

Выводы.

1. Таблицы функций, зависящих от одного аргумента, строятся с одним, двумя или тремя входами. Таблицы с одним входом наименее удобны.

2. Таблицы функций, зависящих от двух аргументов, строятся всегда по крайней мере с двумя входами.

3. В качестве таблиц умножения можно пользоваться таблицами квадратов, основываясь на формуле:

$$xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

4. Интерполированием называется нахождение приближенного значения функции для того значения аргумента, которое не дано в таблице, но лежит между двумя данными в таблице значениями.

5. Линейное интерполирование основано на замене данной функции „линейной" функцией, т. е. функцией прямой пропорциональности внутри интервала между двумя данными в таблице значениями.

6. Формула линейного интерполирования:

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta y_0,$$

где $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ разность между двумя последовательными значениями функции, данными в таблице, соответствующими значениям аргумента, между которым находится то значение x, для которого требуется найти значение y; $x_0 < x < x_1$; $h = x_1 - x_0$ интервал аргумента. Полагая $\frac{x - x_0}{h} = t$, где t положительная правильная дробь $0 < t < 1$, получим:

$$y = y_0 + t\Delta y_0.$$

7. Формула интерполирования второго порядка (формула Ньютона второго порядка):

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2} \Delta^2 y_0,$$

для получения которой требуется знать три значения функции y_0, y_1, y_2, соответствующие x_0, x_1, x_2, $y_1 - y_0 = \Delta y_0$; $y_2 - y_1 = \Delta y_1$; $\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0$, разность второго порядка, или „вторая" разность.

Обозначая $\frac{x - x_0}{h} = t$, получим:

$$y = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2} \Delta^2 y_0.$$

8. Наибольшее абсолютное значение третьего члена последней формулы равно $\frac{\Delta^2 y_0}{8}$, а потому, когда $\Delta^2 y_0 < 4$ единиц последнего знака, который взят в таблицах, то пренебрежение последним членом вызовет погрешность меньше половины единицы последнего знака и тогда почти всегда можно пользоваться формулой линейного интерполирования.

9. При интерполировании по таблицам функции z, зависящей от двух аргументов x и y, если интервал для $x = h$ и для $y = k$, вводя обозначения $z = z_{0,0}$ при соответствующих значениях $x = x_0$

и $y=y_0$, $z=z_{1,0}$ при $x=x_1$; $y=y_0$; $z_{0,1}$ при $x=x_0$, $y=y_1$ пользуемся формулой:

$$z=z_{0,0}+\frac{x-x_0}{h}(z_{1,0}-z_{0,0})+\frac{y-y_0}{k}(z_{0,1}-z_{0,0}).$$

10. Полная предельная погрешность при нахождении значения функции по заданному значению аргумента помощью таблиц при линейном интерполировании по ним складывается из:

a) предельной погрешности от закругления чисел, данных в таблице $\eta_1=0{,}5$ единиц последней значащей цифры;

b) предельной погрешности от линейного интерполирования $\eta_2 \doteq \frac{1}{8}\Delta^2 y < 0{,}5$ единиц последней значащей цифры;

c) предельной погрешности от закругления интерполяционной поправки $\eta_3=0{,}5$ единиц последней значащей цифры;

d) предельной погрешности, зависящей от погрешности α_4 неточно заданного аргумента:

$$\eta_4=\alpha_4\frac{\Delta y}{h} \text{ единиц последней значащей цифры.}$$

Общая предельная погрешность при пользовании таблицами не должна превышать

$$\eta=\left[\frac{3}{2}+\alpha_4\frac{\Delta y}{h}\right] \text{ единиц последней значащей цифры,}$$

а в случае когда $\alpha_4 \leqslant 0{,}5$ последней значащей цифры, то

$$\eta=\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\frac{\Delta y}{h}\right] \text{ единиц последней значащей цифры,}$$

где Δy и h выражены в единицах последней значащей цифры.

11. При обратном нахождении значения аргумента x по известному значению y, формула линейного интерполирования имеет вид:

$$x=x_0+\frac{h}{\Delta y_0}(y-y_0)$$

и погрешность, зависящая от пренебрежения членом второго порядка

$$\alpha_2<\frac{1}{8}\Delta^2 y_0\cdot\frac{h}{\Delta y_0}.$$

12. Полная предельная погрешность при нахождении значения аргумента по заданному значению функции помощью таблиц при линейном интерполировании, складывается из:

a) предельной погрешности от закругления чисел, данных в таблице:

$$\alpha_1 = 0{,}5\frac{h}{\Delta y} \text{ единиц последней значащей цифры.}$$

b) предельной погрешности линейного интерполирования:

$$\alpha_2 \doteq \frac{1}{8}\Delta^2 y\frac{h}{\Delta y} < 0{,}5\frac{h}{\Delta y} \text{ единиц последней значащей цифры.}$$

c) предельной погрешности от закругления интерполяционной поправки: $\alpha_3 = 0{,}5$ единиц последней значащей цифры.

d) предельной погрешности, зависящей от погрешности η_4 данного значения аргумента:

$$\alpha_4 = \frac{h}{\Delta y}\eta_4 \text{ единиц последней значащей цифры.}$$

Общая предельная погрешность при обратном пользовании таблицами не должна превышать

$$\alpha = \left[(1+\eta_4)\frac{h}{\Delta y} + \frac{1}{2}\right] \text{ единиц последней значащей цифры,}$$

а в случае, когда $\eta_4 \leqslant 0{,}5$

$$\alpha = \left[\frac{3}{2}\frac{h}{\Delta y} + \frac{1}{2}\right] \text{ единиц последней значащей цифры,}$$

откуда, из сравнения двух последних формул, получаем:

$$\alpha = \eta\frac{h}{\Delta y}.$$

Вопросы.

1. Что называется таблицей с одним, двумя входами?
2. Как построить таблицу квадратов с одним входом и ту же таблицу с двумя входами?
3. Можно ли построить таблицу умножения с одним входом?
4. Как по таблицам умножения, данным для двузначных чисел, умножать многозначные?
5. Как можно производить деление помощью таблиц умножения?
6. Какие преимущества представляют таблицы квадратов при пользовании ими в качестве таблиц умножения и какие их недостатки?

7. Что называется интерполированием? Что называется линейным интерполированием?

8. Всегда ли линейное интерполирование дает погрешность?

Придумать таблицы, линейное интерполирование по которым не будет давать погрешности. Какова должна быть функция, линейное интерполирование по таблицам которой не дает погрешности?

9. Дает ли интерполяционная формула второго порядка погрешность или нет?

10. Что такое табличная разность первого и второго порядка?

11. Как надо составлять таблицы функций, чтобы было допустимо линейное интерполирование?

12. Рассмотреть таблицы (например тригонометрические) в той их области, где линейное интерполирование недопустимо, и выяснить, нельзя ли уменьшить число значащих цифр в таблице так, чтобы линейное интерполирование стало допустимым.

13. Почему в формуле $y = y_0 + t\Delta y$ мы принимаем $0 < t < 1$; какой смысл имела бы та же формула, если принять $1 < t < 2$ и в частности $t = 2$?

14. Из чего складывается полная предельная погрешность при пользовании таблицами? Можно ли ожидать, что действительная погрешность будет равна предельной и если это возможно, то при каких условиях?

15. При каких условиях обратное пользование таблицами, т. е. нахождение функции по заданному значению аргумента дает бо́льшую погрешность, чем при прямом пользовании и при каких условиях меньшую?

16. Если нужно иметь таблицы для определения квадратов и квадратных корней и мы хотим ограничиться одной таблицей, что выгоднее (в смысле уменьшения погрешности) — пользоваться одной таблицей квадратов или одной таблицей квадратных корней?

Глава VII.

Вычисления помощью логарифмов.

§ 24. Логарифмические таблицы.

Как известно, пользование таблицами логарифмов дает значительное упрощение при различного рода вычислениях, а потому получило широкое применение.

Логарифмические таблицы, как и многие другие таблицы функций, могут быть составлены при помощи разложения функции логарифма в ряд.

В дифференциальном исчислении доказываются формулы разложения логарифма в бесконечные ряды:

$$\ln(a+z)=\ln a+\frac{z}{a}-\frac{z^2}{2a^2}+\frac{z^3}{3a^3}-\frac{z^4}{4a^4}+\ldots \tag{66}$$

а также

$$\ln(a+z)=\ln a+2\left[\frac{z}{2a+z}+\frac{1}{3}\frac{z^3}{(2a+z)^3}+\frac{1}{5}\frac{z^5}{(2a+z)^5}+\ldots\right] \tag{67}$$

где символ ln означает так называемый натуральный логарифм числа, взятый при основании $e=2{,}718282\ldots$

Для получения Бриггова логарифма, т. е. логарифма при основании 10, надо помножить натуральный логарифм на число

$$M=\frac{1}{\ln 10}=0{,}4342945\ldots \tag{68}$$

таким образом, обозначая Бриггов логарифм символом lg, получим

$$\lg x=M\ln x=0{,}434\ln x. \tag{69}$$

Взяв несколько первых членов в формулах (66) и (67) можно приближенно вычислить значение логарифма числа, но лишь при условии, если разложение в ряд „сходится", т. е. если сумма n членов ряда при возрастании n дает конечное и определенное число при заданных значениях величин a и z. Нетрудно видеть, что условие „сходимости" требует, чтобы члены ряда были убывающими (условие это необходимо, но не достаточно).

Условие это будет очевидно выполнено, если в формуле (66) принять

$$\left|\frac{z}{a}\right|<1 \text{ и в формуле (68) } \left|\frac{z}{2a+z}\right|<1,$$

т. е. в первой формуле необходимо, чтобы $|z|<a$, во второй же при отрицательном z получим то же условие $|z|<a$, а при положительном z оно может быть произвольным. Число a, конечно, положительно, так как только положительные числа имеют вещественные логарифмы.

Нетрудно теперь показать, какую погрешность мы допустим, если возьмем ограниченное число членов разложения. Покажем это для простейшего случая, когда мы ограничимся в правых частях формул (66) и (67) всего двумя членами разложения, т. е. возьмем только члены первого порядка относительно z.

Для формулы (66) отбрасываемые члены в случае $z > 0$ составляют знакопеременный ряд, сумму которого обозначим через S_1

$$S_1 = \frac{z^2}{2a^2} - \frac{z^3}{3a^3} + \frac{z^4}{4a^4} - \frac{z^5}{5a^5} + \dots \tag{70}$$

Так как, согласно условию, члены этого ряда убывают, то, заключив в скобки по два последовательных члена,

$$S_1 = \left(\frac{z^2}{2a^2} - \frac{z^3}{3a^2}\right) + \left(\frac{z^4}{4a^4} - \frac{z^5}{5a^5}\right) + \dots$$

мы получим сумму разностей, каждая из которых положительна, откуда следует $S_1 > 0$.

Представив тот же ряд в виде:

$$S_1 = \frac{z^2}{2a^2} - \left(\frac{z^3}{3a^3} - \frac{z^4}{4a^4}\right) - \left(\frac{z^5}{5a^5} - \frac{z^6}{6a^6}\right) - \dots$$

мы на основании тех же соображений получим $S_1 < \frac{z^2}{2a^2}$,

откуда

$$0 < S_1 < \frac{z^2}{2a^2}, \tag{71}$$

т. е. сумма всех отбрасываемых членов меньше первого из отброшенных членов.

В случае, когда $z < 0$ рассуждение наше неприменимо. Подставим в этом случае в формулу (70) вместо z $(-z)$, тогда

$$S_2 = \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} + \frac{z^4}{4a^4} + \frac{z^5}{5a^5} + \dots$$

Сравним эту сумму с суммой геометрической прогрессии:

$$S = \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{2a^3} + \frac{z^4}{2a^4} + \frac{z^5}{2a^5} + \dots,$$

все члены которой, начиная со второго, больше членов суммы S_2.

Отсюда следует, что $S_2 < S$; но $S = \dfrac{\frac{z^2}{2a^2}}{1 - \frac{z}{a}}$, следовательно

$$S_2 < \frac{\frac{z^2}{2a^2}}{1 - \frac{z}{a}} = \frac{z^2}{2a(a-z)}. \tag{72}$$

При пользовании вторым видом разложения, где все члены одного знака, при отбрасывании всех членов, начиная с третьего, мы получим погрешность в виде ряда, для суммы которого S_3 помощью такого же рассуждения, как и для случая S_2, получим

$$S_3 < \frac{z^3}{6(2a+z)\,a\,(a+z)}. \tag{73}$$

Формула (73) верна для z как положительного, так и отрицательного. При вычислении Бриггова логарифма надо полученные величины умножить еще на $M = 0{,}434\ldots$

Формула (67) может служить для быстрого приближенного вычисления логарифма. Отбрасывая члены высших порядков, имеем для Бриггова логарифма

$$\lg(a+z) \doteq \lg a + \frac{2Mz}{2a+z} \tag{74}$$

с погрешностью

$$\Delta < \left|\frac{Mz^3}{6(2a+z)\,a\,(a+z)}\right|. \tag{75}$$

Пример 162. Найти $\lg 3$:

$\lg 3 = \frac{1}{2}\lg 9 = \frac{1}{2}\lg(10-1)$; пользуясь формулой (74), принимая $a = 10$, $z = -1$, получим:

$$2\lg 3 \doteq \lg 10 - \frac{2M}{19} \doteq 1 - \frac{2\cdot 0.4342945}{19} \doteq 0{,}9542848.$$

Отсюда $\lg 3 \doteq 0{,}4771424$,
между тем как на самом деле $\lg 3 \doteq 0{,}4771213$, т. е. полученный нами логарифм точен до 2 единиц пятого десятичного знака.

В самом деле, из формулы (75) следует:

$$\Delta < \frac{0{,}43}{6\cdot 19\cdot 10{,}9} < \frac{1}{20000},$$

т. е. погрешность меньше $\frac{1}{2}$ единицы четвертого знака.

При грубом вычислении логарифма и малой величине $\left|\frac{z}{a}\right|$ можно воспользоваться более простой формулой

$$\lg(a+z) \doteq \lg a + \frac{M}{a}z. \tag{76}$$

Так, например, для данного примера

$$\lg 9 \doteq 1 - \frac{0{,}43429}{10} \doteq 0{,}956571$$

$$\lg 3 \doteq 0{,}478286;$$

погрешность вычисления равна единице третьего десятичного знака. Этого следовало ожидать, так как согласно формуле (72)

$$S_2 < \frac{1}{2 \cdot 10 \cdot 9} < \frac{1}{180}.$$

Если в формуле (75) считать $z = \Delta a$ абсолютной погрешностью числа a, то $\frac{z}{a} = \delta_a$ будет относительной погрешностью того же числа, $\lg(a+z) - \lg a = \Delta \lg a$ есть не что иное, как абсолютная погрешность логарифма, и следовательно из (76)

$$\lg(a+z) - \lg a \doteq M\frac{z}{a}, \text{ т. е. } \Delta \lg a = M\delta_a; \qquad (77)$$

имеем:

абсолютная погрешность Бриггова логарифма равна произведению модуля на относительную погрешность числа;

и еще проще:

абсолютная погрешность натурального логарифма равна относительной погрешности данного числа.

Сравнивая формулу (76) с формулой линейного интерполирования

$$y = y_0 + \frac{\alpha}{h}\Delta y_0$$

для случая

$$y_0 = \lg a,\ y = \lg(a+z);\ z = \alpha$$

получим:

$$\frac{\Delta y_0}{h} \doteq \frac{M}{a};\quad \Delta y_0 \doteq \frac{h}{a}M. \qquad (78)$$

Что же касается предельной погрешности при условии линейного интерполирования, то при ε положительном из формулы (71) следует, что эта погрешность

$$\eta < \frac{M\alpha^2}{2a^2} \qquad (79)$$

Возьмем крайний случай $\alpha = h$, т. е. предположим, что мы путем линейной формулы получаем из данного в таблице значения следующее значение в той же таблице. В этом случае

$$\eta < \frac{Mh^2}{2a^2}.$$

Если таблица, о которой идет речь, составляется с n десятичными знаками мантиссы, то для точного получения результата должно быть:

$$\eta < \frac{1}{2\cdot 10^n}.$$

Возьмем для этого

$$\frac{Mh^2}{2a^2} < \frac{1}{2\cdot 10^n},$$

откуда

$$\frac{h}{a} < \frac{1}{\sqrt{M}\cdot 10^{\frac{n}{2}}}; \text{ но } \frac{1}{\sqrt{M}} \doteq 1{,}5.$$

Следовательно

$$\frac{h}{a} < \frac{1{,}5}{10^{\frac{n}{2}}}$$

и для различных значений n получим:

$$\begin{array}{lllll} n = & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{h}{a} < & 0{,}015 & 0{,}005 & 0{,}0015 & 0{,}0005 \end{array}$$

Неравенство будет выполнено очевидно, если примем для этих четырех случаев:

$$\frac{h}{a} = 0{,}01 \quad 0{,}001 \quad 0{,}001 \quad 0{,}0001.$$

Таким образом, если для четырехзначных логарифмов дать значения всех логарифмов трехзначных чисел от 100 до 1000, то лишь в начале таблицы мы будем имет $\frac{h}{a} = 0{,}01$ и условие будет выполнено. Точно так же для пятизначных и шестизначных можно дать логарифмы всех четырехзнач ых чисел, а для семизначных логарифмы чисел с пятью значащими цифрами. При этих условиях можно для четырех и пятизначных всегда получить путем линейного интерполирования поправку логарифма для одной лишней цифры числа, а для шести и семизначных даже для двух цифр.

На самом деле погрешность интерполирования далеко не достигает $\frac{1}{2}$ единицы последней цифры. Если просмотрим таблицы логарифмов и разности первого порядка, мы увидим, что разность второго порядка даже в начале таблицы меньше единицы последней значащей цифры.

При обычном интерполировании, как мы видели, наибольшее значение погрешности, зависящей от отбрасывания члена второго порядка, получается на середине интервала при $t=\frac{1}{2}$; для формулы (79) это будет соответствовать $a=\frac{1}{2}h$, и мы получим тогда

$$\eta=\frac{Mh^2}{8a^2}<0{,}055\frac{h^2}{a^2}. \tag{80}$$

Таким образом для четырехзначных таблиц, где наименьшее значение, выраженное в единицах последней значащей цифры, равно $a=1000$; $h=10$; $\frac{h^2}{a^2}=\frac{1}{10000}$;

$$\eta<0{,}0000055.$$

Для пятизначных при $a=10000$; $h=10$; $\frac{h^2}{a^2}=\frac{1}{1000000}$;

$$\eta<0{,}000000055.$$

Отсюда ясно, что интерполяционная погрешность логарифмических таблиц совершенно ничтожна и, даже в худшем случае, для четырехзначных таблиц (в начале) не превышает половины единицы пятого десятичного знака. Проверим этот худший случай более точно. Воспользуемся таблицами семизначных логарифмов и найдем по ним:

	Δ
$\lg\ 100 \doteq 2{,}0000000$	$0{,}0043214$
$\lg\ 101 \doteq 2{,}0043214$	

откуда линейным интерполированием получим:

$$\lg\ 100{,}5 \doteq 2+\frac{1}{2}\cdot 0{,}0043214=2{,}0021607.$$

Между тем по тем же таблицам

$$\lg\ 100{,}5 \doteq 2{,}0021661.$$

Таким образом не только четыре десятичных знака получены точно, но, как и следовало ожидать, пятый отличается меньше, чем на 0,55. В середине таблицы, когда первая значащая цифра числа a не равна единице, погрешность становится много меньше, а для пятизначных она еще много меньше. В дальнейшем будем при расчёте погрешностей логарифмических таблиц просто пренебрегать погрешностью от интерполирования.

Основываясь на формулах предыдущей главы, определим полную погрешность пользования логарифмическими таблицами, которая составится прежде всего из погрешностей η_1 и η_3 от закругления данного логарифма и от закругления интерполяционной поправки; их сумма не превышает единицы последней значащей цифры; к ним присоединяется $\eta_4 = \frac{\Delta y}{h}\alpha_4$, погрешность, зависящая от неточности, данного числа. Принимая $\frac{\Delta y}{h} = \frac{M}{a}$, получим: $\eta_4 = \frac{M}{a}\alpha_4$ или $\eta_4 < 0,44\,\delta_4$, где $M < 0,44$ и δ_4—относительная погрешность числа.

Если таблицы даны с n знаками, т. е. для чисел с n значащими цифрами и погрешность α_4 данного числа не превышает $\frac{1}{2}$ единицы последней значащей цифры, то

$$\delta_4 < \frac{1}{2\cdot 10^{n-1}} \text{ в начале таблицы}$$

и

$$\delta_4 < \frac{1}{2\cdot 10^{n}} \text{ в конце таблицы}$$

и соответственно

$\eta_4 < 2,2\cdot 10^{-n}$ в начале и $\eta_4 < 2,2\cdot 10^{-(n+1)}$ в конце таблицы.

Таким образом погрешность данного числа в $\frac{1}{2}$ единицы n'ой значащей цифры может вызвать погрешность логарифма в 2,2 n'ого десятичного знака.

Полная погрешность может достигнуть 3,2 единиц последнего десятичного знака.

Пример 163. Найдем по семизначным логарифмам логарифм числа $\frac{10}{7}$ двумя способами, а именно взяв логарифм дроби $\frac{10}{7}$, выраженной в виде десятичной, и затем разность $\lg 10$ и $\lg 7$.

$$\frac{10}{7} \doteq 1,429$$

$$\begin{array}{r} \lg 1,429 \doteq 0,1550322 \\ \lg 10 - \lg 7 \doteq 0,1549020 \\ \hline \eta_4 \doteq 0,0001302 \end{array}$$

Погрешность логарифма превысила единицу четвертого десятичного знака, хотя данное число и было дано с четырьмя точными значащими цифрами.

Отсюда ясно, что при данных n точных значащих цифрах нет смысла брать для логарифма больше n десятичных знаков мантиссы.

Обратное нахождение числа по данному логарифму производится в различных таблицах одним из двух способов. Либо даются так называемые таблицы антилогарифмов, либо пользуются теми же таблицами логарифмов. В первом случае мы снова имеем две погрешности, зависящие от закругления чисел в таблице и закругления интерполяционной поправки, из которых каждая не превышает половины единицы последнего знака, и, кроме того, погрешности

$$\alpha_4 = \frac{h}{\Delta y}\eta_4 = \frac{a}{M}\eta_4 \doteq 2{,}3a\eta_4.$$

Если $\eta_4 = k \cdot 10^{-n}$, т. е. при таблицах с n десятичными знаками мантиссы погрешность мантиссы равна k единицам последнего знака, то

$$\alpha_4 \doteq \frac{2{,}3ka}{10^n}.$$

Принимая искомое число целым, ищем его с n значащими цифрами т. е. полагаем:

$$10^{n-1} < a < 10^n$$

и тогда:

$$\alpha_4 \doteq 0{,}23k \text{ в начале таблицы}$$

и

$$\alpha_4 \doteq 2{,}3k \text{ в конце таблицы.}$$

Само собою разумеется, что если a не целое число, то α_4 выражается также не в целых единицах, а в единицах последней значащей цифры. Если $k < \frac{1}{2}$, то $\alpha_4 < 0{,}12$ в начале таблицы и $\alpha_4 < 1{,}2$ в конце.

Наибольшая общая предельная погрешность равна $1 + 1{,}2 = 2{,}2$ единицы последней значащей цифры.

В случае нахождения числа по обычным таблицам логарифмов, последняя погрешность от неточности заданного логарифма будет конечно та же; погрешность, зависящая от закругления интерполяционной поправки, также не превышает $^1/_2$ единицы последнего знака, и лишь предельная погрешность, зависящая от неточности таблиц, будет теперь равна не $^1/_2$ единицы последнего знака, а

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{\Delta y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{M}.$$

т. е.

$$\alpha_1 < 0{,}23 \cdot 0{,}5 < 0{,}12$$

единицы последнего знака в начале таблицы и

$$\alpha_1 < 2{,}3 \cdot 0{,}5 < 1{,}2$$

единицы последнего знака в конце таблицы.

Наибольшая общая погрешность при нахождении числа по данному логарифму равна

$$\alpha = 0{,}5 + 1{,}2 + 2{,}3k$$

и при $k = 0{,}5$, $\alpha < 2{,}9$ единицы последней значащей цифры, т. е. меньше, чем при нахождении логарифма по данному числу.

Погрешностью от линейнего интерполирования мы и здесь пренебрегаем вследствие ее ничтожной величины.

Считаем нужным здесь обратить внимание еще на один источник погрешности логарифмических таблиц, о котором было выше уже упомянуто при рассмотрении одного из примеров. Во многих таблицах (обычно четырехзначных) часто приводят готовые интерполяционные поправки, вычисленные для всех чисел, стоящих в одной строке, между тем, как мы видели, поправки эти на самом деле могут быть не одинаковы для чисел, стоящих в начале и в конце строки.

Пример 164. Возьмем таблицы Брадиса. Находим по ним:

$$\lg 2{,}207 : 0{,}3424 + 0{,}0014 = 0{,}3438$$
$$\lg 2{,}287 : 0{,}3579 + 0{,}0014 = 0{,}3593,$$

т. е. интерполяционные поправки в обоих случаях одинаковы, между тем для первого случая $\Delta y = 0{,}0020$ и для второго $\Delta y = 0{,}0019$, следовательно, первая поправка действительно равна $20 \cdot 0{,}7 = 14$, а вторая $19 \cdot 0{,}7 = 13{,}3$ и, следовательно, правильнее было взять в последнем случае поправку 13.

Само собою разумеется, что из этого не следует, что если взять поправку 13, то логарифм получится точнее, чем если взять 14. Дело в том, что при суммировании погрешностей возможны различные комбинации их знаков. Если погрешность таблиц была одного знака, а погрешность от закругления поправки другого, то сумма их может оказаться малой, хотя бы последняя и была взята больше, чем следовало бы.

Рассмотрим несколько примеров вычислений помощью логарифмических таблиц.

Пример 165. Вычислить $x = \pi^4$ помощью четырехзначных таблиц; $\pi \doteq 3{,}14159\ldots$ или с точностью 4 значащих цифр π : 3,142

$$\begin{array}{lrl} \text{находим} & \lg 3{,}14 & \doteq 0{,}4969 \\ \text{поправка} & 2 & \ldots 3 \\ \hline & \lg 3{,}142 & = 0{,}4972 \\ & 4 \lg 3{,}142 & = 1{,}9888 \end{array}$$

По антилогарифмам находим:

$$\begin{array}{lrr} & 1{,}988 \ldots\ldots & 97{,}27 \\ \text{поправка} & 8 \ldots\ldots & 18 \\ \hline & 1{,}9888 \ldots\ldots & 97{,}45 \end{array}$$

Таким образом $\pi^4 \doteq 97{,}45$, между тем как при более точном вычислении $\pi^4 \doteq 97{,}409$.

Можно думать, что погрешность в 4 единицы четвертой цифры получилась, казалось, главным образом из-за неточности данного числа.

Правильнее было бы, следовательно, при нахождении логарифма не пользоваться готовыми поправками, а принимая во внимание, что табличная разность $\Delta y = 14$, а к 3,140 надо прибавить 1,6 единицы четвертого знака взять поправку $\frac{14 \cdot 1{,}6}{10} = 2{,}24$, т. е. 2 единицы четвертого знака, тогда

$$\lg \pi \doteq 0{,}4969 + 0{,}0002 = 0{,}4971$$
$$4 \lg \pi \doteq 1{,}9884$$
$$\pi^4 \doteq 97{,}36.$$

Несмотря на бо́льшую точность взятого числа, результат получился еще хуже, с погрешностью в 5 единиц последней цифры, очевидно за счет другого источника ошибок. В самом деле, прибегая к семизначным логарифмам, находим:

$$\lg 3{,}140 \doteq 0{,}4969296,$$

т. е. данное в четырехзначных логарифмах число почти на 0,3 четвертого знака меньше истинного.

$$\lg 3{,}1415 \doteq 0{,}4971509,$$

т. е. имеет как раз среднее значение между принятыми нами первый раз значениями 0,4972 и второй раз 0,4971.

При умножении на 4 мы должны были бы получить:

$$4 \lg 3{,}1416 \doteq 1{,}9886,$$

откуда даже по четырехзначным логарифмам получили бы

$$\pi^4 \doteq 97{,}40,$$

т. е. с погрешностью меньше единицы последнего знака. Главным источником ошибки оказалась неточность таблиц.

Пример 166.

$$x = \frac{\sqrt{16{,}28}\cdot 32{,}453^2}{42{,}63}.$$

Сделаем вычисление помощью пятизначных таблиц Пржевальского:

$$\begin{array}{rl}
\lg 16{,}28 \doteq 1{,}21165; & \frac{1}{2}\lg 16{,}28 \doteq 0{,}60582 \\
\lg 32{,}45 \doteq 1{,}51121; & 2\lg 32{,}453 \doteq 3{,}02250 \\
\text{поправка } \underline{3\ .\ .\ .\ 4}; & \lg 42{,}63 \doteq 1{,}62972 \\
1{,}51125; & \\
\hline
& \lg x \doteq 1{,}99860 \\
& x \doteq 99{,}678.
\end{array}$$

Предположим, что все числа даны нам точно. Пользуясь семизначными логарифмами, повторим вычисление.

$$\begin{array}{rl}
\lg 16{,}28 \doteq 1{,}2116544; & \frac{1}{2}\lg 16{,}28 \doteq 0{,}6058272 \\
\lg 32{,}453 \doteq 1{,}5112548; & 2\lg 32{,}453 \doteq 3{,}0225096 \\
\lg 42{,}63 \doteq 1{,}6297153; & \lg 42{,}63 \doteq 1{,}6297153 \\
\hline
& \lg x \doteq 1{,}9986215 \\
& x \doteq 99{,}68309
\end{array}$$

Предполагая, что помощью семизначных логарифмов мы вычислили точно пять значащих цифр, мы видим; что полученная нами погрешность при вычислении помощью пятизначных достигла 5 единиц пятой значащей цифры.

Случайно можно получить и значительно худший результат, в особенности если бы данные числа были неточными.

Пример 167. Предположим, что при прохождении курса анализа, где выводится предел $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \doteq 2{,}71828$, мы захотели бы помощью пятизначных логарифмов вычислить:

$$x_1 = \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}; \quad x_2 = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}; \quad x_3 = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}$$

$$\begin{array}{lll}
\lg 1{,}1 \doteq 0{,}04139 & \lg 1{,}01 \doteq 0{,}00432 & \lg 1{,}001 \doteq 0{,}00043 \\
10\lg 1{,}1 \doteq 0{,}4139 & 100\lg 1{,}01 \doteq 0{,}432 & 1000\lg 1{,}001 \doteq 0{,}43 \\
x_1 \doteq 2{,}5936; & x_2 \doteq 2{,}7039 & x_3 \doteq 2{,}6915
\end{array}$$

Мы получили бы кажущееся противоречие. В анализе доказывается, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n>0$ возрастает с возрастанием n и стремится к числу e; мы получили обратное $x_3 < x_2$.

Дело разъясняется просто — неточностью нашего способа вычисления. Вычисляя точно с пятью значащими цифрами, мы получили бы

$$x_1 \doteq 2{,}5937; \qquad x_2 \doteq 2{,}7048; \qquad x_3 \doteq 2{,}7169.$$

В самом деле по более точным таблицам

$$\lg 1{,}001 \doteq 0{,}000434077;$$

следовательно приняв $\lg 1{,}001 = 0{,}00043$, мы допустим погрешность в 0,4 единицы пятого знака, что при умножении на 1000 дало 4 единицы третьего знака. Следовательно мы можем ожидать правильность не более чем 2 значащих цифр для числа x_3, что и имеет место.

Из приведенных выше примеров явствует, что весьма трудно установить общее правило, по которому можно было бы судить о погрешности вычисления помощью логарифмов. Предельную погрешность на основании выведенных выше правил определить всегда можно. Однако же, принимая во внимание, что обычно при сложных вычислениях получаются взаимные компенсации погрешностей разных знаков, действительная погрешность почти всегда много меньше предельной.

С большой степенью вероятности, хотя и не с полной уверенностью, можно утверждать, что при пользовании n-значными логарифмами можно получить $(n-1)$ точных значащих цифр. Иногда можно получить и все n точных цифр, но никак не более. Конечно, бывают случаи, как например в примере (167), когда результат, как оказывается, имеет точных цифр на две и даже три меньше, чем данные числа и их логарифмы. Такие случаи однако следует считать исключительными.

Присоединяем краткую характеристику наиболее употребительных таблиц и способов пользования ими.

1. Трехзначные таблицы. Трехзначными таблицами редко пользуются, так как гораздо проще пользование логарифмической линейкой, дающей точность не меньше, чем трехзначные таблицы. Даже в случае грубых расчетов удобнее пользоваться четырехзначными таблицами, но без интерполирования. Благодаря этому значительно понижается погрешность вычисления, между тем как сложность вычислений не увеличивается.

2. Четырехзначные таблицы. Четырехзначные таблицы следует считать наиболее удобными для громадного большинства технических вычислений. Таблица вместе с интерполяционными по-

правками свободно умещается на двух страницах и потому чрезвычайно удобна для пользования. Обычно к такой таблице присоединяется таблица антилогарифмов, дающая возможность особенно просто отыскивать по данному логарифму соответствующее ему число. Пользование такой таблицей, как было выяснено, дает в отдельных случаях меньшую погрешность, чем нахождение числа по таблицам логарифмов.

3. Пятизначные таблицы. Пятизначные таблицы, смотря по их формату, занимают от 20 до 30 страниц. К таким таблицам антилогарифмов уже не присоединяют, так как это сделало бы их слишком громоздкими. Как уже было сказано, для большинства технических вычислений достаточно четырех точных значащих цифр. Часто, когда хотят иметь большую степень уверенности в точности четырех цифр, прибегают к пользованию пятизначными логарифмами, отбрасывая в конечном результате пятую значащую цифру как сомнительную.

4. Шести, семизначные и другие таблицы. Таблицами с числом знаков более пяти пользуются при специальных вычислениях, на рассмотрении их мы не остановимся. Недавно изданы у нас шестизначные таблицы Иордана, размер которых значительно меньше бывших ранее в широком употреблении таблиц Вега-Бреминера с 7 знаками.

Существуют еще так называемые Гауссовы таблицы логарифмов сумм и разностей, служащие для нахождения логарифма суммы или разности двух чисел по данным логарифмам самих чисел. На описании этих таблиц, точно так же как и на описании логарифмов тригонометрических функций мы не останавливаемся, так как метод пользования ими всегда изложен в самих таблицах, а исследование степени точности может быть проведено на основании общих соображений, изложенных в предыдущей главе и относящихся к любым таблицам.

Примеры. Найти предельную погрешность при вычислении простых формул, беря у заданных чисел четырехзначные цифры с помощью четырехзначных логарифмов. Найти действительную погрешность в ряде примеров, вычисляя как с помощью таблиц, так и без них:

Пример 168. Объем конуса $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$; $r=2{,}18765$; $h=10{,}8613$.

Пример 169. Объем шара $V=\frac{4}{3}\pi r^3$; $r=4{,}72853$.

Пример 170. Радиус кру[га] по данной площади $r=\sqrt{\frac{F}{\pi}}$

$F=17{,}8445$.

Пример 171. Поверхность цилиндра $S=2\pi r^2+2\pi rh$. Показать, что не только скорее, но и точнее получается результат, если преобразовать формулу: $S=2\pi r\,(r+h)$, чем если отдельно находить оба члена суммы.

$$r = 4{,}5723, \qquad h = 21{,}4667.$$

Пример 172. Вычислить $\left(\frac{27}{13}\right)^3$ при помощи четырехзначных и пятизначных логарифмов дважды: один раз логарифмируя отдельно числителя и знаменателя и другой раз взяв $\frac{27}{13} \doteq 2{,}076923$.

Пример 173. Вычислить с помощью четырехзначных логарифмов, а также без них

$$c=\sqrt{a^2+b^2} \quad a \doteq 5{,}816\ (^1/_2) \quad b \doteq 3{,}458\ (^1/_2).$$

§ 25. Логарифмическая линейка.

Мы видели, что пользование логарифмами связано с довольно значительным риском погрешности во многих случаях. Поэтому, если не требуется большого числа знаков, часто выгоднее обходиться без логарифмов, если только вычисление не слишком сложно. В особенности следует избегать пользования логарифмами, если есть возможность вести вычисление на арифмометре. Совершенно иначе обстоит дело при пользовании логарифмической линейкой, которая обладает рядом незаменимых преимуществ по сравнению с логарифмическими таблицами (соответствующего числа знаков) и тем более по сравнению с простыми арифметическими вычислениями.

Для выяснения способа вычисления помощью логарифмической линейки, необходимо прежде всего остановиться на понятии функциональной шкалы. Обычная масштабная линейка, как известно, имеет равномерные деления, отстоящие одно от другого на равных расстояниях в 1 *см* или в 1 *мм*. Такая линейка представляет собою равномерную шкалу $x=\lambda t$, где λ — так называемый модуль шкалы, т. е. та длина, которая соответствует значению $=1$; если взять $\lambda=1$ *см*, то получим шкалу, на которой цифрам 0, 1, 2... будут соответствовать длине 0, 1, 2 *см* и т. д.

Функциональная шкала получится, если наносить деления $x=\lambda f(t)$, где $f(t)$ какая-нибудь функция от t. На рис. 3 представлен вид квадратной шкалы $x=\lambda t^2$, где $\lambda=2$ *мм*. Мы получаем для $x=0, 1, 2, 3...$ неравномерную шкалу, так как отрезок $0-1=2$ *мм*; $0-2=8$ *мм*; $0-3=18$ *мм* и т. д., а следобательно интервалы между отметками 0, 1, 2, 3 соответственно равны 2, 6, 10... *мм*.

На рис. 4 представлена шкала $x=\lambda\sqrt{t}$; приняв $\lambda=20$ *мм*, получим отрезок $0—1=20$ *мм*, $0—2=28{,}2$ *мм*; $0—3=34{,}6$ *см*; $0—4=40$ *мм* и т. д., т. е. в то время как для шкалы квадратов интервалы возрастали с увеличением t, здесь они окажутся убывающими.

Вообще функциональная шкала представляет собою масштаб, на котором отрезки нанесены пропорционально значению какой-либо функции, в то время как численные пометки соответствуют значениям независимой переменной. Такого рода шкалы широко применяются при всякого рода графических вычислениях. Наиболее часто употребляемой и наиболее важной является логарифмическая шкала

Рис. 3.

Рис. 4.

$$x=\lambda \lg t.$$

Логарифмическая линейка представляет собою не что иное, как две такого рода тождественные шкалы, нанесенные как на неподвижной, так и на подвижной части линейки. Обычная длина нормальной линейки равна 25 *см* и эта длина принимается за модуль, т. е. $\lambda=25$ *см*. Так как для десятичного логарифма $\lg 10=1$, то вся длина линейки соответствует логарифму десяти. Деления получаются неравномерные, так как $\lg 2 \doteq 0{,}30$, $\lg 3 \doteq 0{,}48...$ и т. д. Деление 3 находится почти на середине линейки. С левого края находится пометка 1, так как $\lg 1=0$; с правого края должна была бы находиться пометка 10, но обычно и там ставят тоже 1. Кроме крупных делений для 1, 2, 3... 10 нанесены деления более мелкие, а именно между 1—2 через каждую 0,01, между 2—4 через каждые 0,02, между 4—10 через каждые 0,05. На линейках меньшего размера нанесены деления для более крупных интервалов (рис. 5).

Принцип пользования логарифмической линейкой чрезвычайно прост:

а) Умножение. Так как $\lg ab=\lg a+\lg b$, то поставив начало подвижной шкалы против пометки a на неподвижной, мы получим против пометки b на подвижной пометку c на неподвижной, причем очевидно

$$\lg c=\lg a+\lg b=\lg ab, \text{ откуда } c=ab.$$

Для удобства отсчета вдоль линейки двигается визир, небольшое стеклышко с нанесенной на него тонкой чертой, перпендикулярно к линейке. Устанавливая черту на делении b на подвижной линейке, мы получаем на неподвижной значение c. На рис. 6 показано умножение $2\times 3=6$.

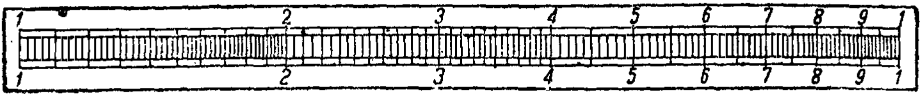

Рис. 5.

b) Деление. Тот же чертеж поясняет деление. Установив пометку b против пометки c, мы очевидно будем иметь, что начало подвижной шкалы окажется против деления a на неподвижной, для которого

$$\lg a=\lg c-\lg b;\ \lg a=\lg\frac{c}{b},\ \text{откуда}\ \ a=\frac{c}{b}.$$

Для десятичного логарифма, как известно, увеличение или уменьшение числа в 10, 100 и 1000... раз вызывает только изменение характеристики, т. е. целой части логарифма и не меняет его мантиссы. Так, например, $\lg 23{,}5=\lg 2{,}35+1$; $\lg 0{,}235=\lg 2{,}35-1$.

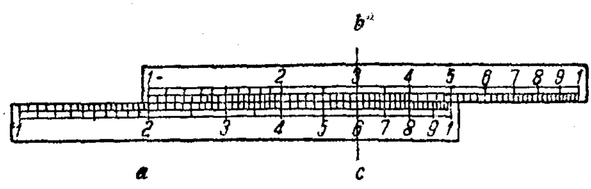

Рис. 6.

Следовательно, если начало линейки считать не за lg 1, а за lg 10 или lg 0,1, то деления 1, 2, 3... будут соответствовать lg 10, lg 20, lg 30 или lg 0,1, lg 0,2, lg 0,3 и т. д. Это обстоятельство дает возможность производить вычисления независимо от положения запятой данных чисел при помощи одной и той же линейки. Так, например, при умножении 4×7 мы должны поставить начало подвижной линейки против 4 на неподвижной; но тогда деление 7 на подвижной окажется за пределами неподвижной и найти произведение казалось бы невозможно. Представим себе, что неподвижная линейка взята вдвое длиннее (рис. 7). Вторая ее половина, для чисел от lg 10 до lg 100 была бы точной копией первой половины. Можно следовательно воспользоваться и первой половиной, передвинув всю подвижную часть на единицу длины влево, т. е. поставив не начало, а конец подвижной линейки против числа 4 на неподвижной и тогда число 7 на подвижной станет против числа 2,8 на неподвижной. Но это число мы возьмем уже в 10 раз больше и прочтем 28. При делении числа 28 на 7 надо очевидно получить частное не против левого, а против правого конца подвижной шкалы. Таким образом на логарифмической линейке можно перемножать или делить какие угодно по

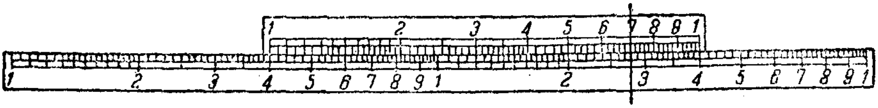

Рис. 7.

величине числа (число точных значащих цифр, конечно, ограничено). Результат, получаемый на линейке, даст нам значащие цифры, положение же запятой определяется проще всего в уже грубой оценке результата.

c) Комбинированное умножение и деление. Для нахождения величины $d=\frac{ab}{c}$ имеем $\lg d=\lg a-\lg c+\lg b$. Ставим визир против числа a на неподвижной линейке и устанавливаем

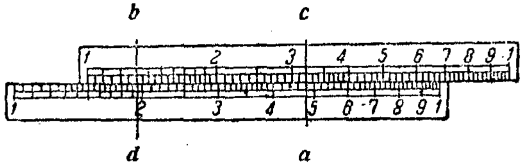

Рис. 8.

деление c подвижной на нить визира. Конец линейки (правый или левый) дал бы нам частное $\frac{a}{c}$, но нам его не нужно, нам нужно это частное умножить на b, т. е. как раз нужно установить конец линейки на это число, что уже нами сделано; против числа b на подвижной мы будем иметь число $\frac{a}{c}\cdot b$ на неподвижной. Таким образом одна установка подвижной шкалы даст нам сразу результат двух действий. На рис. 8 показано нахождение

$$d=\frac{4{,}8\cdot 13}{32}=1{,}95.$$

Подвижная шкала линейки движется в пазах, вырезанных в неподвижной. Верхний край B' подвижной линейки и соприкасающийся с ней край B неподвижной также используется для логарифмической шкалы. На этих краях наносится шкала с модулем вдвое меньше, чем модуль нижней шкалы, т. е. деления $x_1 = \frac{\lambda}{2} \lg t_1$ (рис. 9).

Сравним деления, стоящие одно над другим на верхней и нижней шкалах. На нижней нанесено $x = \lambda \lg t$, следовательно для $x = x_1$, имеем

$$\frac{\lambda}{2} \lg t_1 = \lambda \lg t \text{ или } \lg t_1 = 2 \lg t;$$

$$t_1 = t^2.$$

Таким образом числа верхней шкалы B представляют собою квадраты чисел нижней A. Для возведения в квадрат или извлечения корня нет надобности перемещать подвижную шкалу. При помощи визира всегда имеем против числа t на нижней число t^2 на верхней и против t_1 на верхней число $\sqrt{t_1}$ на нижней. Само собою разумеется, что на верхней шкале умещаются две логарифмические шкалы, т. е. для чисел от $\lg 1 = 0$ до $\lg 100 = 2$; при этом первая слева половина линейки дает числа от 1 до 10, т. е. однозначные, а вторая от 10 до 100, т. е. двузначные. При изменении значения нижней шкалы в 10 раз, значения верхней изменяются в 100 раз, т. е. числу двузначному на нижней шкале соответствует трехзначное в левой половине и четырехзначное в правой половине верхней шкалы.

d) Вычисления, в которые входит возведение в квадрат или извлечение корня. Такого рода вычисления осуществляются при помощи пользования обеими шкалами. Пример: $d = \frac{ab^2}{c}$. Устанавливаем на верхней неподвижной шкале визир против числа a и ставим подвижную шкалу так, чтобы число c на верхнем ее краю совпадало с визиром (рис. 10). Полученное частное надо умножить на b^2; частное нет надобности отсчитывать и записывать, просто берем на нижней шкале подвижной линейки число b, тогда на верхней будем иметь b^2 и против него на верхней неподвижной число $d = \frac{ab^2}{c}$.

На рис. 10 показано вычисление $d = \frac{17 \cdot 2{,}54^2}{8{,}8} \doteq 12{,}45$.

Аналогично, чтобы найти $d = \frac{a\sqrt{b}}{c}$ берем a и c на нижней шкале,

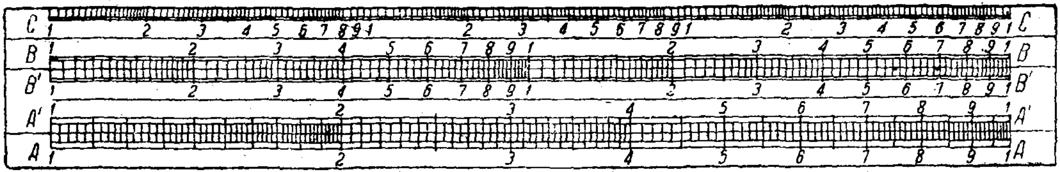

Рис. 9.

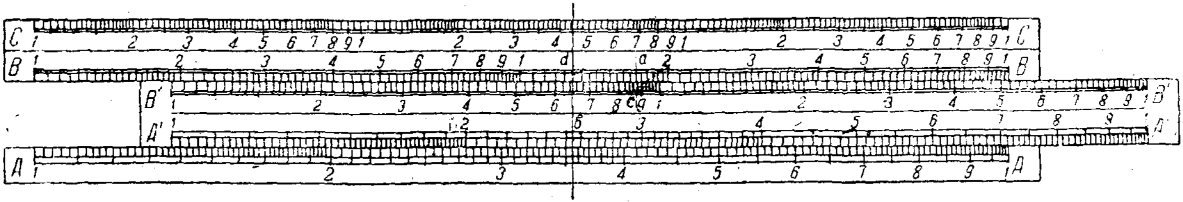

Рис. 10.

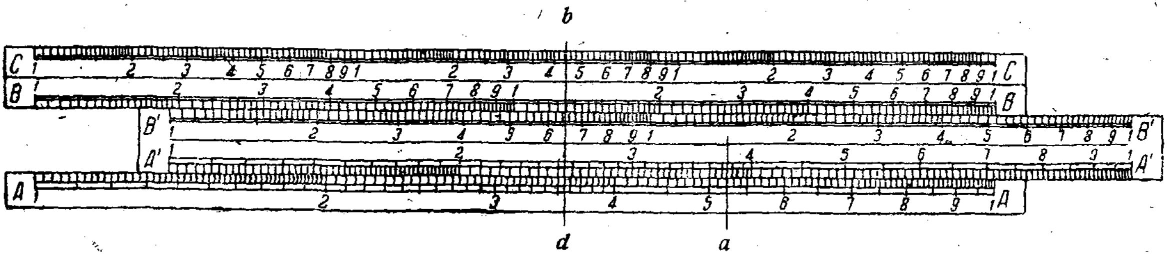

Рис. 11.

а b на верхней. Результат получается на нижней неподвижной шкале.

$$d = \frac{5{,}2 \cdot \sqrt{6{,}5}}{3{,}75} = 3{,}54 \text{ (рис. 11)}.$$

Обычно на линейке наносятся еще различные шкалы, как например шкала кубов C, которая получается путем нанесения логарифмической шкалы с модулем в три раза меньшим. Кроме того, часто наносится равномерная шкала, дающая возможность находить значения логарифмов чисел. В самом деле, если нанести шкалу $x_2 = \lambda t_2$, то сравнивая ее со шкалой $x = \lambda \lg t$ для $x_2 = x$, очевидно получим $t_2 = \lg t$. На задней стороне подвижной линейки наносятся шкалы для $\lg \sin \alpha$ и $\lg \operatorname{tg} \alpha$ для тригонометрических вычислений.

Мы считаем излишним описывать здесь все возможные операции с логарифмической линейкой, так как при отсутствии линейки, описание операций теряет смысл, если же имеется линейка в руках, то требуется только упражнение с ней, для получения навыка; устройство ее столь просто, что совершенно не требует подробного описания.

Переходим теперь к существенному вопросу о степени точности вычисления при помощи линейки. Деления на линейках наносятся весьма точно и погрешность хорошей линейки не должна превышать сотых долей миллиметра. После длительной работы с линейкой обычно подвижная часть линейки слегка удлиняется и перестает точно совпадать с неподвижной, причем погрешность эта иногда достигает $^1/_4$ *мм*, и линейка становится мало годной для пользования. На нормальной линейке деления нанесены так, что наибольшее расстояние между двумя делениями не превышает 1,4 *мм*, и наименьшее не менее 0,5 *мм*. При некотором навыке удается для наибольшего интервала оценивать на-глаз 0,1 интервала и для наименьшего 0,2 интервала. Таким образом погрешность от неправильности отсчета не превышает 0,14 *мм*, а в большинстве случаев меньше и равна около 0,1 *мм*. Так как модуль обычной линейки равна 250 *мм*, то погрешность логарифма не превышает

$$\alpha = \frac{0{,}14}{250} \doteq 0{,}00056.$$

Но между абсолютной погрешностью десятичного логарифма α и относительной погрешностью числа δ простая зависимость:

$$\alpha = M\delta, \text{ где } M \doteq 0{,}43.$$

Следовательно $\delta = \dfrac{\alpha}{M} \dfrac{0{,}00056}{0{,}43} \doteq 0{,}0013.$

Мы взяли наихудший случай. Обычно погрешность меньше и в среднем не превышает 0,001, и таким образом линейка дает возможность на протяжении всей шкалы иметь три точных значащих цифры а в начале линейки даже четыре. Громадное преимущество логарифмической линейки перед таблицами в том, что относительная погрешность числа при пользовании линейкой на всем ее протяжении почти одинакова, в то время как трехзначные таблицы дают как в начале, так и в конце всего 3 значащих цифры, т. е. для числа, у которого первая цифра—единица, дают относительную погрешность до 0,01, а у числа с первой цифрой 9 почти 0,001. Логарифмическая линейка хорошего качества, при достаточном навыке дает точность, близкую к точности четырехзначных таблиц в их начале и близкую к точности трехзначных в их конце.

Для увеличения точности при пользовании логарифмической линейкой, прибегают либо к линейкам бо́льшей длины, (напр. 50 или 100 *см*), пользование которыми не очень удобно, либо к лупе, позволяющей делать более точный отсчет.

Наконец, существуют еще линейки, на которых деления нанесены на цилиндр, у которых шкала в десять и более раз длиннее, чем у обычной линейки, благодаря чему степень точности достигает, а иногда и превышает точность четырехзначных таблиц логарифмов.

Приводим ряд примеров, расположенных в порядке возрастающей сложности. Рекомендуется по возможности делать проверку путем арифметического вычисления, дабы на первых порах иметь возможность оценить погрешность своего вычисления.

Числовые данные примеров часто приведены с таким числом знаков, которое не может быть отсчитано на линейке, очевидно, лишние знаки не приходится принимать во внимание.

Пример 174. $5{,}863 \cdot 2{,}165 =$

Пример 175. $0{,}159 \cdot 15{,}81 =$

Пример 176 $0{,}0987 \cdot 0{,}432 =$

Пример 177. $\dfrac{15{,}681}{3{,}1416} =$

Пример 178. $\dfrac{0{,}8734}{2{,}431} =$

Пример 179. $\dfrac{48}{17{,}63} =$

Пример 180. $\dfrac{14 \cdot 93}{16{,}37} =$

Пример 181. $\dfrac{54{,}41 \cdot 0{,}421}{18{,}93} =$

Пример 182. $56{,}12 \cdot 0{,}47 \cdot 0{,}54 =$

Пример 183. $27{,}5^2 \cdot 1{,}462 =$

Пример 184. $\dfrac{14{,}32^2 \cdot 28}{16{,}47} =$

Пример 185. $3{,}1416 \cdot 4{,}9^2 \cdot 0{,}8 =$

Пример 186. $\sqrt{15{,}62} \cdot 28{,}17 =$

Пример 187. $\sqrt{\dfrac{8{,}71}{3{,}45}} =$

Пример 188. $\dfrac{\sqrt{0{,}596} \cdot 12}{3{,}49} =$

Пример 189. $\sqrt{14\sqrt{23}} =$

Пример 190. $14{,}81^3 =$

Пример 191. $\sqrt[3]{15{,}6\cdot 6{,}7}=$

Пример 192. $\frac{4}{3}\pi\cdot 0{,}893^3=$

Пример 193. $\frac{\sqrt[3]{185}\cdot\sqrt{19{,}5}}{14{,}3^2}=$

Выводы

1. Логарифм числа x при основании 10 (Бриггов), обозначаемый $\lg x$, выражается через логарифм при основании $e=2{,}71828\ldots$ (натуральный), обозначаемый $\ln x$ помощью формулы

$$\lg x=M\ln x,$$

где $M=\frac{1}{\ln 10}=0{,}4342945\ldots$ модуль Бриггова логарифма.

2. Если известен $\lg a$, то $\lg(a+z)$ может быть вычислен по одной из формул:

$$\lg(a+z)=\lg a+M\left[\frac{z}{a}-\frac{z^2}{2a^2}+\frac{z^3}{3a^3}-\frac{z^4}{4a^4}+\ldots\right] \text{ для } |z|<1$$

$$\lg(a+z)=\lg a+2M\left[\frac{z}{2a+z}+\frac{1}{3}\frac{z^3}{(2a+z)^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\frac{z^5}{(2a+z)^5}+\ldots\right] \text{ для } z>-1.$$

Откуда получаются грубо приближенные формулы

$$\lg(a+z)=\lg a+M\frac{z}{a}$$

с погрешностью

$$\Delta<\frac{Mz^2}{2a^2} \text{ при } z>0$$

и

$$\Delta<\frac{Mz^2}{2a(a-z)} \text{ при } z<0$$

и

$$\lg(a+z)=\lg a+\frac{2Mz}{2a+z}$$

с погрешностью

$$\Delta<\frac{Mz^3}{6(2a+z)a(a+z)}.$$

3. Абсолютная погрешность Бриггова логарифма равна приближенно произведению модуля M на относительную погрешность числа

$$\eta_4 = 0{,}44\delta_4.$$

4. Погрешность от линейного интерполирования при пользовании обычными таблицами логарифмов столь мала, что ею можно пренебречь.

5. Общая предельная погрешность при прямом пользовании таблицами логарифмов равна:

$$\eta = 1 + 0{,}44\delta_4,$$

где δ_4 — предельная относительная погрешность данного числа. Если абсолютная погрешность числа $\alpha_4 < \frac{1}{2}$ последней значащей цифры, то

$\eta \doteq 3{,}2$ един. послед. цифры в начале таблицы.

$\eta \doteq 2{,}2$ един. послед. цифры в конце таблицы.

6. Общая предельная погрешность при пользовании таблицами антилогарифмов равна

$$\alpha = 1 + 0{,}23a\eta_4,$$

где η_4 — предельная абсолютная погрешность числа. Предполагая, что η_4 не более $\frac{1}{2}$ единицы последней значащей цифры, получим

$\alpha \doteq 1{,}12$ един. поел. цифры в начале таблицы

$\alpha \doteq 2{,}2$ „ „ „ „ конце „

7. Общая предельная погрешность при обратном пользовании таблицами логарифмов равна

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{h}{\Delta y} + 0{,}23a\eta_4,$$

и при указанных выше условиях

$\alpha \doteq 0{,}74$ единиц посл. цифры в начале таблицы

$\alpha \doteq 2{,}9$ „ „ „ „ конце таблицы.

8. По таблицам с n знаками мантиссы можно вычислять с точностью, не превышающей n значащих цифр числа, причем последняя цифра часто бывает сомнительной.

9. Логарифмическая линейка представляет собою две подвижные относительно друг друга логарифмические шкалы.

10. Погрешность пользования обычной линейкой длины 25 *см*, около 0,001, вследствие чего точность ее выше, чем точность трехзначных таблиц логарифмов в их начале и ниже чем у четырехзначных таблиц в их конце.

Вопросы.

1. В чем заключается преимущество логарифмических вычислений помощью таблиц по сравнению с арифметическими и в чем их недостаток?

2. Почему при помощи четырехзначных логарифмических таблиц нельзя вычислить 5 значащих цифр числа?

3. Составить себе трехзначные таблицы логарифмов, которые можно уместить на карточке размера открытого письма, и проверить по таким таблицам различные случаи погрешностей в начале и конце таблицы, делая вычисления арифметически.

4. Какое преимущество таблиц антилогарифмов по сравнению с пользованием таблицами логарифмов для разыскания числа по логарифму?

5. Почему не пользуются пятизначными таблицами антилогарифмов?

6. Что такое функциональная шкала?

7. Какое преимущество вычисления при помощи логарифмической линейки по сравнению с арифметическим, кроме быстроты?

8. Сколько установок подвижной линейки надо сделать, чтобы решить пропорцию?

9. На сколько меньше точность линейки 12,5 *см* по сравнению с линейкой 25 *см*, предполагая в обоих случаях погрешность отсчета около 0,1 *мм*?

10. Какое преимущество вычисления при помощи логарифмической линейки по сравнению с логарифмическими таблицами, кроме быстроты?

Вычисление погрешностей помощью методов дифференциального исчисления.

Все, кто хотя бы немного знаком с дифференцированием функций, не могут не заметить, что очень многие формулы приближенных вычислений напоминают формулы дифференциального исчисления. И действительно, знание дифференциального исчисления может упростить изложение некоторой части приближенных вычислений.

Пусть дано

$$w = f(x, y, z, \ldots, u, v), \tag{1}$$

т. е. w представляет собою функцию от ряда величин $x, y, z, \ldots, u, v$, которые носят название независимых переменных, т. е. величин, значения которых мы можем выбирать по произволу. Будем предполагать, что w есть функция непрерывная от своих аргументов; это значит, что если все или некоторые из аргументов изменить, например, вместо x взять $x+\Delta x$, вместо y взять $y+\Delta y$ и т. д., где Δx, Δy, так называемые приращения переменных x и y, представляют собою малые величины, то функция w изменится на некоторую величину Δw, также малую; и если Δx, $\Delta y, \ldots$ брать все меньше и меньше по абсолютному значению, т. е. приближать к нулю, то Δw также должно убывать по абсолютному значению и приближаться к нулю.

Иначе, более просто и точно можно сказать, что если Δx, Δy, $\Delta z \ldots$ стремятся к нулю, то и Δw стремится к нулю.

Если мы предположим, что $x, y, z, \ldots, u, v$ представляют собою некоторые приближенные значения ряда величин, а $(x+\Delta x)$; $(y+\Delta y)$; $(z+\Delta z)$; ...; $(u+\Delta u)$; $(v+\Delta v)$ точные значения этих же величин, то Δx, Δy, $\Delta z, \ldots, \Delta u, \Delta v$ будут их погрешностями.

Если изменению аргументов на Δx, $\Delta y \ldots$ соответствует изменение функции на Δw, то очевидно мы имеем

$$w+\Delta w = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots, u+\Delta u, v+\Delta v), \tag{2}$$

причем это значение функции должно быть его истинным значением. Вычитая (1) из (2) получим

$$\left.\begin{array}{l}\Delta w = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z, \ldots,\ u+\Delta u,\ v+\Delta v) - \\ \qquad -f(x, y, z, \ldots, u, v).\end{array}\right\} \tag{3}$$

Так напр., объем усеченного конуса

$$V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)$$

можно рассматривать, как функцию от величин h, R и r. И следовательно

$$\Delta V=\frac{1}{3}\pi(h+\Delta h)\Big[(R+\Delta R)^2+(R+\Delta R)(r+\Delta r)+(r+\Delta r)^2\Big]-$$

$$-\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2).$$

Мы могли бы вычислить эту величину Δv, но ее значение выразилось бы весьма громоздкой формулой. В других случаях точное вычисление оказалось бы вообще невозможным.

Вычисление значительно упрощается, если его не производить с полной точностью.

Из дифференциального исчисления известно, что в случае, когда данная функция непрерывна и имеет непрерывные первые частные производные, то приращение ее всегда может быть представлено в виде суммы:

$$\Delta w = dw + \beta, \tag{4}$$

где dw полный дифференциал функции, а β бесконечно малая величина высшего порядка по сравнению с dw.

В начале курса уже было указано на различие между малой и бесконечно малой величинами. Бесконечно малая величина переменная и может принимать значения даже весьма большие. Если две бесконечно малые величины α и β разного порядка и порядок β выше, чем порядок α, то отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ должно стремиться к нулю, когда α и β оба стремятся к нулю. Так напр., если $\beta=2\alpha^2+3\alpha^3$, то

$$\frac{\beta}{\alpha}=2\alpha+3\alpha^2$$

и очевидно стремится к нулю при α, стремящемся к нулю. Но отсюда еще не следует, что β непременно меньше α. При

$$\alpha=1;\quad \beta=5$$

$$\alpha = \frac{1}{2}; \qquad \beta = 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

т. е. $|\beta| > |\alpha|$. Но если уменьшать α, то неизбежно β будет убывать быстрее, и найдется такое значение α, при котором β будет не только просто меньше α по абсолютному значению, но в любое число раз меньше.

Так, при

$$\alpha = 0{,}1; \qquad \beta = 0{,}023; \qquad \frac{\beta}{\alpha} = 0{,}23$$

$$\alpha = 0{,}01; \qquad \beta = 0{,}000203; \qquad \frac{\beta}{\alpha} = 0{,}0203$$

$$\alpha = 0{,}001; \qquad \beta = 0{,}000002003; \qquad \frac{\beta}{\alpha} = 0{,}0002003.$$

Таким образом, выбрав α достаточно малым, мы можем добиться того, чтобы β было в любое заданное заранее число раз меньше, чем α, по абсолютному значению. Другими словами, β будет тогда малой величиной высшего порядка в том смысле, как это установлено нами в § 7. В таком случае мы сможем пренебречь этой величиной высшего порядка, как это мы делали все время при вычислении погрешностей.

Мы устанавливаем таким образом следующее правило.

Если дана функция

$$w = f(x, y, z, \ldots, u, v),$$

непрерывная вместе со своими первыми частными производными, и мы дадим дифференциалам dx, dy, $dz \ldots du$, dv достаточно малые значения, то dw будет отличаться от приращения Δw на малую величину высшего порядка.

Следовательно, считая дифференциалы независимых переменных погрешностями, соответствующими данным значениям $x, y, z, \ldots, u, v$, этих переменных, мы получим, что погрешность функции Δw будет приближенно равна полному дифференциалу функции:

$$\left.\begin{aligned} \Delta w \doteq dw = \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z + \ldots \\ \ldots + \frac{\partial w}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial w}{\partial v}\Delta v. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Так напр., для

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$$

получим

$$\Delta V \doteq \frac{1}{3}\pi\left[\frac{\partial V}{\partial h}\Delta h+\frac{\partial V}{\partial R}\Delta R+\frac{\partial V}{\partial r}\Delta r\right]$$

$$\Delta V \doteq \frac{1}{3}\pi\left[(R^2+Rr+r^2)\Delta h+h(2R+r)\Delta R+h(R+2r)\Delta r\right].$$

Напомним, что частной производной функцией w от нескольких независимых переменных по одной из них называется производная, взятая в предположении, что все остальные переменные имеют постоянное значение.

Само собою разумеется, что формула (5) служит для нахождения абсолютной погрешности, и притом не предельной абсолютной погрешности, а действительной погрешности.

Так напр., для

$$w = x + y$$

имеем

$$\Delta w = \Delta x + \Delta y \tag{6}$$

и для

$$w = x - y$$

$$\Delta w = \Delta x - \Delta y, \tag{7}$$

между тем для предельной абсолютной погрешности разности мы считали ее равной сумме, а не разности предельных абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого, так как должны были принять наихудший случай, когда погрешности имеют разные знаки.

Из формул дифференцирования произведения и частного мы можем получить

$$w = u \cdot v$$

$$\Delta w \doteq u(\Delta v) + v(\Delta u) \tag{8}$$

$$w = \frac{u}{v}$$

$$\Delta w \doteq \frac{v(\Delta u) - u(\Delta v)}{v^2}. \tag{9}$$

Точно так же для:

$$w = v^n$$

$$\Delta w \doteq n v^{n-1}\Delta v \tag{10}$$

для любого n целого, дробного, положительного или отрицательного.

Мы можем еще получить и такие формулы для погрешностей, которых элементарно получить не могли. Так напр., для тригонометрических функций:

$$w = \sin v; \qquad \Delta w \doteq \cos v\,(\Delta v) \tag{11}$$

$$w = \cos v; \qquad \Delta w \doteq -\sin v\,(\Delta v) \tag{12}$$

$$w = \operatorname{tg} v; \qquad \Delta w \doteq \frac{\Delta v}{\cos^2 v} \tag{13}$$

$$w = \operatorname{ctg} v; \qquad \Delta w \doteq -\frac{\Delta v}{\sin^2 v} \tag{14}$$

Для логарифма получаем формулу, которой мы уже пользовались:

$$w = \lg v = M \ln v.$$

$$\Delta w \doteq M \frac{\Delta v}{v}\,. \tag{15}$$

Само собою разумеется, что и для сложных функций можно пользоваться теми же формулами. Так напр., для получения погрешности гипотенузы у прямоугольного треугольника при заданных катетах a и b и их погрешностях Δa и Δb, получим

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

$$\Delta c \doteq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}\,[2a(\Delta a) + 2b(\Delta b)]$$

$$\Delta c \doteq \frac{a(\Delta a) + b(\Delta b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

Переходим теперь к определению относительных погрешностей. Заменяя приближенно относительную погрешность отношением дифференциала некоторой величины к самой величине, получим

$$\varepsilon \doteq \frac{dw}{w} = \frac{1}{w}\,dw = d(\ln w).$$

Таким образом относительная погрешность представляет собою приближенное значение дифференциала натурального логарифма или, иначе, *логарифмический дифференциал.*

Так напр., для

$$w = u \cdot v$$

$$\ln w = \ln u + \ln v$$

получаем

$$\varepsilon_w \doteq \varepsilon_u + \varepsilon_v \tag{16}$$

известную формулу для относительной погрешности произведения.

Точно так же для:

$$w = \frac{u}{v}$$

$$\ln w = \ln u - \ln v$$

получаем

$$\varepsilon_w = \varepsilon_u - \varepsilon_v. \tag{17}$$

Рассмотрим пример сложной функции:

$$v = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + Rr + r^2)$$

$$\ln v = \ln\frac{\pi}{3} + \ln h + \ln (R^2 + Rr + r^2)$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \varepsilon_v \doteq \frac{\Delta b}{h} + \frac{(2R + r)\Delta R + (R + 2r)\Delta r}{R^2 + Rr + r^2}.$$

Эта формула значительно более сложным путем получена в примере 87.

Далее можем получить:

$$\varepsilon_v \doteq \frac{\Delta h}{b} + \frac{(2R^2 + Rr)\frac{\Delta R}{R} + (Rr + 2r^2)\frac{\Delta r}{r}}{R^2 + Rr + r^2}$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_h + \frac{(2R^2 + Rr)\varepsilon_R + (Rr + 2r^2)\varepsilon_r}{R^2 + Rr + r^2}$$

Точно так же для

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\ln c = \frac{1}{2}\ln (a^2 + b^2),$$

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}\,\frac{2a\Delta a + 2b\Delta b}{a^2 + b^2} = \frac{a\Delta a + b\Delta b}{a^2 + b^2}.$$

Полученную формулу можно еще преобразовать, введя относительные погрешности для a и b.

$$\varepsilon_c = \frac{a^2\frac{\Delta a}{a} + b^2\frac{\Delta b}{b}}{a^2 + b^2} = \frac{a^2\varepsilon_a + b^2\varepsilon_b}{a^2 + b^2}.$$

И здесь надо обратить внимание на то, что получаемые таким образом формулы дают приближенное выражение для относительных погрешностей, но не для предельных относительных погрешностей. Так напр., для предельной относительной погрешности частного мы должны были взять сумму таковых же погрешностей делимого и делителя, в то время, как формула (17) дает нам разность.

Решения примеров.

№ 3. $3{,}14\,(+0{,}2)$; $3{,}142\,(-0{,}5)$; $3{,}1416\,(-0{,}1)$.

№ 4. $\frac{7}{9} \doteq 0{,}7778\,(-0{,}3)$; $\frac{5}{7} \doteq 0{,}7143\,(-0{,}2)$;

$$\frac{9}{13} \doteq 0{,}6923\,(+0{,}1).$$

№ 5. $\Delta = -300$ *км*/сек.

№ 6. 4,2; 4,0; 4,4; 3,2; 2,2; 1,0; 2, —3.

№ 7. $\frac{3}{7} \doteq 0{,}42857$; $\frac{2}{9} \doteq 0{,}22222$.

№ 8. 4,20; 4, —9.

№ 9. $\varepsilon_1 = -\frac{1}{35000}$; $\varepsilon_2 = -\frac{1}{50000}$; $\varepsilon_3 = \frac{1}{90000}$.

№ 10. $l = 46$ *мм* (0,5); $\delta \doteq \frac{1}{92} \doteq \frac{1}{90}$.

№ 11. $\Delta_1 = 0{,}0003$; $\delta_1 \doteq \frac{1}{4000}$;

$\Delta_2 = 0{,}003$; $\delta_2 \doteq \frac{1}{4000}$;

$\Delta_3 = 0{,}00003$; $\delta_3 \doteq \frac{1}{4000}$;

$\Delta_4 = 0{,}005$; $\delta_4 \doteq \frac{1}{280}$;

$\Delta_5 = 0{,}003$; $\delta_5 \doteq \frac{1}{4700}$;

$\Delta_6 = 0{,}002$; $\delta_6 \doteq \frac{1}{70}$.

№ 14. $\frac{1}{2000}$; $\frac{1}{2000}$; $\frac{1}{6000}$; $\frac{1}{8000}$; $\frac{1}{18000}$.

№ 17. 3; 3; 3.

№ 20. $\sqrt[3]{65} \doteq 4\frac{1}{48} \doteq 4{,}021$ (0,5).

№ 21. 0,0101; 0,497: 0,9905; 13,04; 1,016; 0,000001004.

№ 32. 199,0; $\Delta \doteq 0{,}3$.

№ 33. 2,048; $\Delta \doteq 0{,}0004$.

№ 34. 15,34; $\Delta = 0{,}01$.

№ 35. 32,2; $\Delta = 0{,}09$.

№ 36. 0,89; $\Delta = 0{,}006$.

№ 37. 3,21; $\Delta = 0{,}005$.

№ 42. $\frac{5}{7} + \frac{6}{9} \doteq 1{,}381$; $\Delta \doteq 0{,}0001$; $\delta \doteq \frac{1}{13000}$;

$\frac{5}{7} - \frac{6}{9} \doteq 0{,}047$; $\Delta \doteq 0{,}0007$; $\delta \doteq \frac{1}{60}$.

№ 43. 12,83 (2,5).

№ 44. 0,132 (0,3); $\delta \doteq \frac{1}{400}$.

№ 45. 0,2 (1); $\delta = \frac{1}{2}$.

№ 46. 0,007; $\Delta = 0{,}00005$; $\delta \doteq \frac{1}{140}$.

№ 47. 0,645; $\Delta = 0{,}002$; $\delta \doteq \frac{1}{300}$; $\alpha = \frac{1}{1575}$; $\varepsilon \doteq \frac{1}{1000}$.

№ 48. $a = 17{,}395$; $\sigma \doteq 0{,}046$; $\Delta_a \doteq 0{,}069 \doteq 0{,}07$.

№ 49. $a = 17{,}384$; $\sigma \doteq 0{,}0058$; $\Delta_a \doteq 0{,}0087 \doteq 0{,}009$.

№ 50. $a = 0{,}000182406$; $\sigma \doteq 0{,}00000014$.

№ 51. $a = 61{,}1264$: $\sigma \doteq 0{,}11$; $\Delta_a = 0{,}067$.

№ 55. 16 *кг* (1).

№ 56. 5 цифр; $\Delta = 0{,}0000002$; $\sigma \doteq \frac{1}{15000}$.

№ 57. 49*м*^{3} (0,3).

№ 58. 146; 8,90; 0,20.

№ 67. 63,1; 0,126; 0,00047.

№ 70. $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}552$ (0,3).

№ 71. $\pi = 3{,}142$ (0,5); $\frac{1}{\pi} = 0{,}3182$ (0,7).

№ 72. 7 (0,2).

№ 80. 0,35 сек. (0,3).

№ 81. 22 *м*/сек. (0,5).

№ 82. 1 сек. (0,0003).

№ 83. 4,55; 0,2961; 0,6852; 0,378.

№ 84. 3,02.
№ 85. 2,2 (0,2).
№ 90. 0,7 *см*^{2} (2).
№ 91. 0,3 m; (0,5).
№ 92. 9 *см*; (2).
№ 93. 0,011 (1) или 40′ (5).
№ 94. 0,9 *см*; (0,7).
№ 95. $\Delta y = (2ax + b)\Delta x$; $\delta y = \dfrac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}\Delta x$.
№ 96. 175 *л.* (10).
№ 97. 9 *дм*^{3} (0,3).
№ 98. 6 *см*^{4} (0,7).
№ 99. 557 (7).
№ 105. 0,02 *см*; 0,005 *см*; 0,001 *см*; 0,0007 *см*; 0,001 *см*; 0,003 *см*.
№ 106. С четырьмя десятичными знаками.
№ 107. $\frac{1}{100}$; $\frac{2}{100}$; $\frac{7}{1000}$.
№ 108. 0,0001.
№ 109. 0,5 *см*.
№ 110. 0,05 *см*.
№ 111. 0,0000001; 0,000001; 0,00001; 0,0001.
№ 112. $\delta_a = \delta_r < \frac{1}{200}$.
№ 114. 1,59.
№ 115. 2,92.
№ 116. 23,48.
№ 117. 97,2.
№ 118. $\Delta = 0{,}025$; $\alpha = 0{,}0092$.
№ 128. 3.
№ 129. 2.
№ 130. 3.
№ 131. 4.
№ 132. 3.
№ 133. 3.
№ 134. 2.
№ 135. 3.
№ 136. 17 (0,2).
№ 137. 320.
№ 138. 1,4 *м*/сек.
№ 139. —5.
№ 143. До 25°.
№ 144. Достаточно дать таблицу для целых чисел от 1 до 99, но между 1 и 2 вставить 1,5.
№ 145. При малых значениях k только с одним знаком.
№ 150. При $n = 100$; $\eta_{max} = 0{,}009$.
$n = 500$; $\eta_{max} = 0{,}004$.
$n = 1000$; $\eta_{max} = 0{,}003$.

№ 152. Начиная с 0°35′; в начале таблицы до 0,15, в конце — около 0,0001.

№ 160. При прямом пользовании $\eta = {}^3/_2$, при обратном $a' = 40$ единиц последней значащей цифры.

№ 168. 54,43 (+ 0,4).
№ 169. 442,9 (— 0,4).
№ 170. 2,383 (+ 0,3).
№ 171. 748,1 (— 0,4).
№ 172. 8,959 (+ 0,1).
№ 173. 6,766.
№ 174. 12,7.
№ 175. 2,51.
№ 176. 0,0426.
№ 177. 4,99.
№ 178. 0,359.
№ 179. 2,72.
№ 180. 0,795.
№ 181 1,21.
№ 182. 14,2.
№ 183. 1106.
№ 184. 349.
№ 185. 60,3.
№ 186. 111.
№ 187. 1,59.
№ 188. 2,65.
№ 189. 8,19.
№ 190. 3248.
№ 191. 16,7.
№ 192. 2,98.
№ 193. 0,123.

Оглавление.